

RESISTENZA A FLESSIONE

Sezione a semplice armatura Stato limite di rottura

Consideriamo una sezione soggetta a pura flessione. Ad esempio, in una trave appoggiata agli estremi e soggetta a due carichi concentrati simmetrici e normali rispetto all'asse della trave, le sezioni del tratto centrale sono soggette a pura flessione.

Sia una sezione rettangolare larga b e alta H , armata semplicemente con una sezione A_s di ferri posti a una altezza utile d .

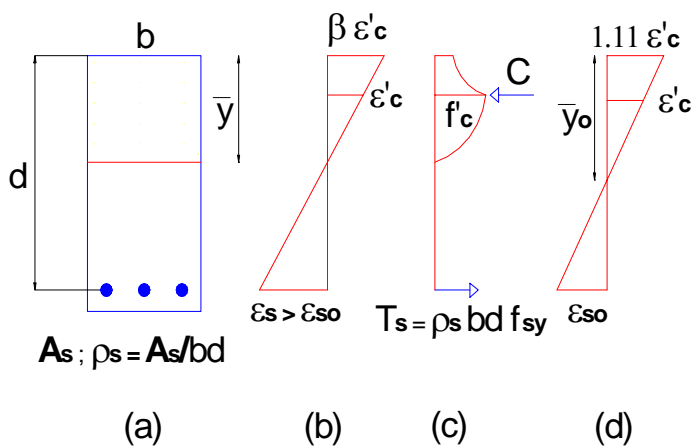


Figura 1. Sezione rettangolare inflessa a semplice armatura. Stato di rottura per armatura inferiore a quella critica (b,c) e in condizioni di armatura critica (d).

Valgono le solite ipotesi per il cemento armato.

Essendo in fase di rottura, la sezione è parzializzata e l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane è destinata esclusivamente alle sezioni reagenti, e cioè alla zona compressa di conglomerato e all'armatura tesa.

Sebbene esista una zona tesa in prossimità dell'asse neutro, tra l'altro in regime di softening, essa è estremamente ridotta, ed è assolutamente influente sul valore del momento interno.

Ipotizziamo, inoltre, che il conglomerato compresso sia in regime di softening e che l'armatura sia allo snervamento.

Con riferimento alle relazioni costitutive assunte per il conglomerato in compressione monoassiale, abbiamo

$$\sigma_c = f'_c \left(2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon'_c} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon_c'^2} \right)$$

$$\sigma_c = f'_c \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_c}$$

rispettivamente per il ramo ascendente e per quello discendente.

Per quanto riguarda l'acciaio, si ipotizza un comportamento elastico lineare-perfettamente plastico.

Per esso sarà $\varepsilon_s > \varepsilon_{so} = f_{sy} / E_s$, con $E_s = 206000MPa$.

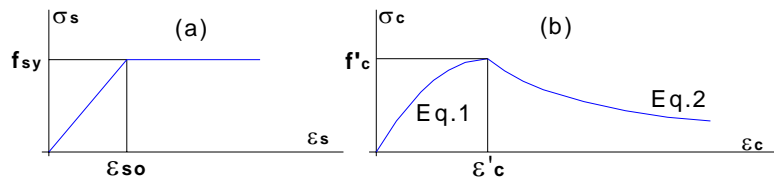


Figura 2. Relazioni costitutive assunte per l'acciaio (a) e per il conglomerato (b).

La legge di distribuzione degli sforzi di compressione nella zona di conglomerato si deduce dalle equazioni costitutive di cui sopra.

Essendo, per la linearità delle deformazioni

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon'_c} = \beta \frac{y}{\bar{y}}$$

si ha

$$\sigma_c = f'_c \left(2\beta \frac{y}{\bar{y}} - \beta^2 \frac{y}{\bar{y}^2} \right)$$

$$\sigma_c = f'_c \frac{\bar{y}}{\beta y}$$

rispettivamente per il ramo ascendente e per il ramo discendente.

La risultante del blocco-sforzi di compressione è

$$C = bf'_c \int_0^{\bar{y}/\beta} \left(2\beta \frac{y}{\bar{y}} - \frac{\beta^2 y^2}{\bar{y}^2} \right) dy + bf'_c \int_{\bar{y}/\beta}^{\bar{y}} \frac{\bar{y}}{\beta y} dy$$

da cui

$$C = bf'_c \bar{y} \frac{\frac{2}{3} + \ln \beta}{\beta}$$

e la risultante di trazione nell'armatura

$$T_s = A_s f_{sy} = \rho_s bdf_{sy}$$

essendo

$$\rho_s = \frac{A_s}{bd}$$

il **rapporto geometrico di armatura**.

L'equilibrio alla traslazione orizzontale fornisce il rapporto adimensionale

$$\frac{\bar{y}}{d} = \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln \beta}$$

L'equilibrio alla rotazione intorno all'asse neutro fornisce

$$M_c = bf'_c \int_0^{\bar{y}/\beta} \left(2\beta \frac{y^2}{\bar{y}} - \frac{\beta^2 y^3}{\bar{y}^2} \right) dy + bf'_c \int_{\bar{y}/\beta}^{\bar{y}} \frac{\bar{y}}{\beta} dy$$

da cui

$$M_c = bf'_c \frac{\bar{y}^2}{\beta^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) + bf'_c \frac{\bar{y}^2}{\beta^2} (\beta - 1)$$

e quindi

$$M_c = bf'_c \bar{y}^2 \frac{12\beta - 7}{12\beta^2}$$

mentre è

$$M_s = \rho_s bd^2 f_{sy} \left(1 - \frac{\bar{y}}{d} \right)$$

Il momento interno adimensionalizzato è

$$m = m_c + m_s = \frac{M_c + M_s}{bd^2 f'_c} = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2} \frac{\bar{y}^2}{d^2} + \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \left(1 - \frac{\bar{y}}{d} \right)$$

Per qualsiasi fissate caratteristiche geometriche e meccaniche, l'andamento del momento adimensionale presenta un massimo per $\beta_{\max} = 1.108$. Tale valore si ottiene annullando la derivata prima di m , che fornisce la condizione di stazionarietà

$$\frac{21}{\beta} - 20 = 18(\ln \beta)^2 - 12 \ln \beta$$

Corrispondentemente, è

$$m_{\max} = 0.4274 \frac{\bar{y}_{\max}^2}{d^2} + \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \left(1 - \frac{\bar{y}_{\max}}{d} \right)$$

$$\frac{\bar{y}_{\max}}{d} = 1.44 \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} = 1.44\psi$$

avendo posto

$$\psi = \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c}$$

rapporto meccanico d'armatura, e quindi

$$m_{\max} = \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} - 0.553 \left(\frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \right)^2 = \psi - 0.553\psi^2$$

Se la quantità di armatura è tale che allo stato ultimo l'acciaio è a incipiente snervamento, da considerazioni geometriche nell'ambito della sezione si ha

$$\frac{\bar{y}_o}{d} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{so}}{\beta_{\max} \epsilon'_c}} = \frac{1}{1 + \frac{f_{sy}}{2.216ef'_c}}$$

e

$$\frac{\bar{y}_o}{d} = 1.44 \frac{\rho_{so} f_{sy}}{f'_c}$$

che produce insieme con la precedente

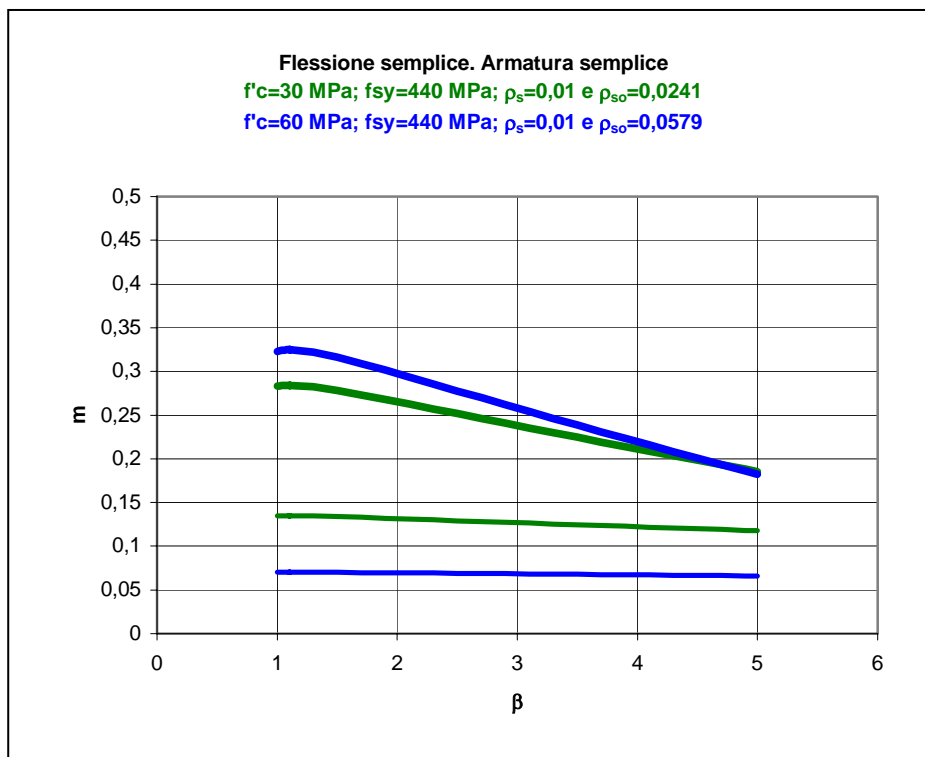
$$\rho_{so} = 0.694 \frac{1}{1 + \frac{f_{sy}}{2.216ef'_c}} \frac{f'_c}{f_{sy}}$$

valore critico del rapporto geometrico di armatura.

Nella tabella seguente sono calcolati i valori critici per le quantità indicate.

f'_c	f_{sy}	E_c	e	ρ_{so}
20	440	24213	8,508	0,0146
30	440	30030	6,860	0,0241
40	440	34130	6,036	0,0346
50	440	37175	5,541	0,0459
60	440	39526	5,212	0,0579
70	440	41396	4,976	0,0703
80	440	42918	4,800	0,0832
90	440	44183	4,662	0,0964
100	440	45249	4,553	0,1098

Nella figura seguente sono riportate le curve di m per le quantità indicate.



Fase elastica della sezione

Campo di deformazione $0 \leq \beta \leq \beta_y$

Nella fase iniziale di carico, la sezione compressa ha una distribuzione di sforzo parabolica con risultante

$$C = bf'_c \int_0^{\bar{y}} \left(2\beta \frac{y}{\bar{y}} - \frac{\beta^2 y^2}{\bar{y}^2} \right) dy = bf'_c \bar{y} \frac{3\beta - \beta^2}{3}$$

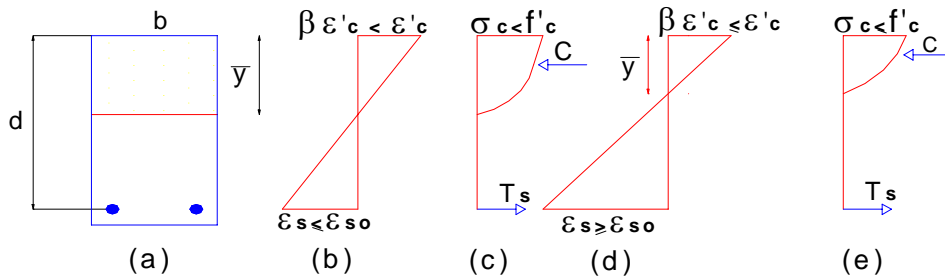


Figura 3. Stati della sezione nei campi $0 \leq \beta \leq \beta_y$ (c,d) e $\beta_y \leq \beta \leq 1$ (d,e)

L'acciaio è in campo elastico e la sua deformazione vale

$$\varepsilon_s = \beta \varepsilon'_c \frac{1 - \frac{\bar{y}}{d}}{\frac{\bar{y}}{d}}$$

e lo sforzo

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = 2 \frac{f'_c E_s}{E_c} \frac{d - \bar{y}}{\bar{y}} \beta = 2 f'_c e \beta \frac{1 - \frac{\bar{y}}{d}}{\frac{\bar{y}}{d}}$$

Il tiro nell'armatura è

$$T_s = \rho_s b d \sigma_s = 2 f'_c \rho_s e b d \beta \frac{1 - \frac{\bar{y}}{d}}{\frac{\bar{y}}{d}}$$

L'equilibrio orizzontale produce l'equazione

$$\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + 2\frac{3\rho_s e \bar{y}}{3-\beta d} - \frac{6\rho_s e \beta}{3-\beta} = 0$$

I momenti di C e T_s rispetto all'asse neutro sono

$$M_c = bf'_c \int_0^{\bar{y}} \left(2\beta \frac{y^2}{\bar{y}} - \frac{\beta^2 y^3}{\bar{y}^2} \right) dy = bf'_c \bar{y}^2 \frac{8\beta - 3\beta^2}{12}$$

$$M_s = 2\rho_s b d^2 ef'_c \beta \frac{\left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}}$$

Il momento interno adimensionale è

$$m = \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 \frac{8\beta - 3\beta^2}{12} + 2\rho_s e \beta \frac{\left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}}$$

Campo di deformazione $\beta_y \leq \beta \leq 1$

Il conglomerato è in campo ascendente e l'acciaio allo snervamento.
Le risultanti di sforzo sono

$$C = bf'_c \bar{y} \frac{3\beta - \beta^2}{3}$$

$$T_s = \rho_s b d f_{sy}$$

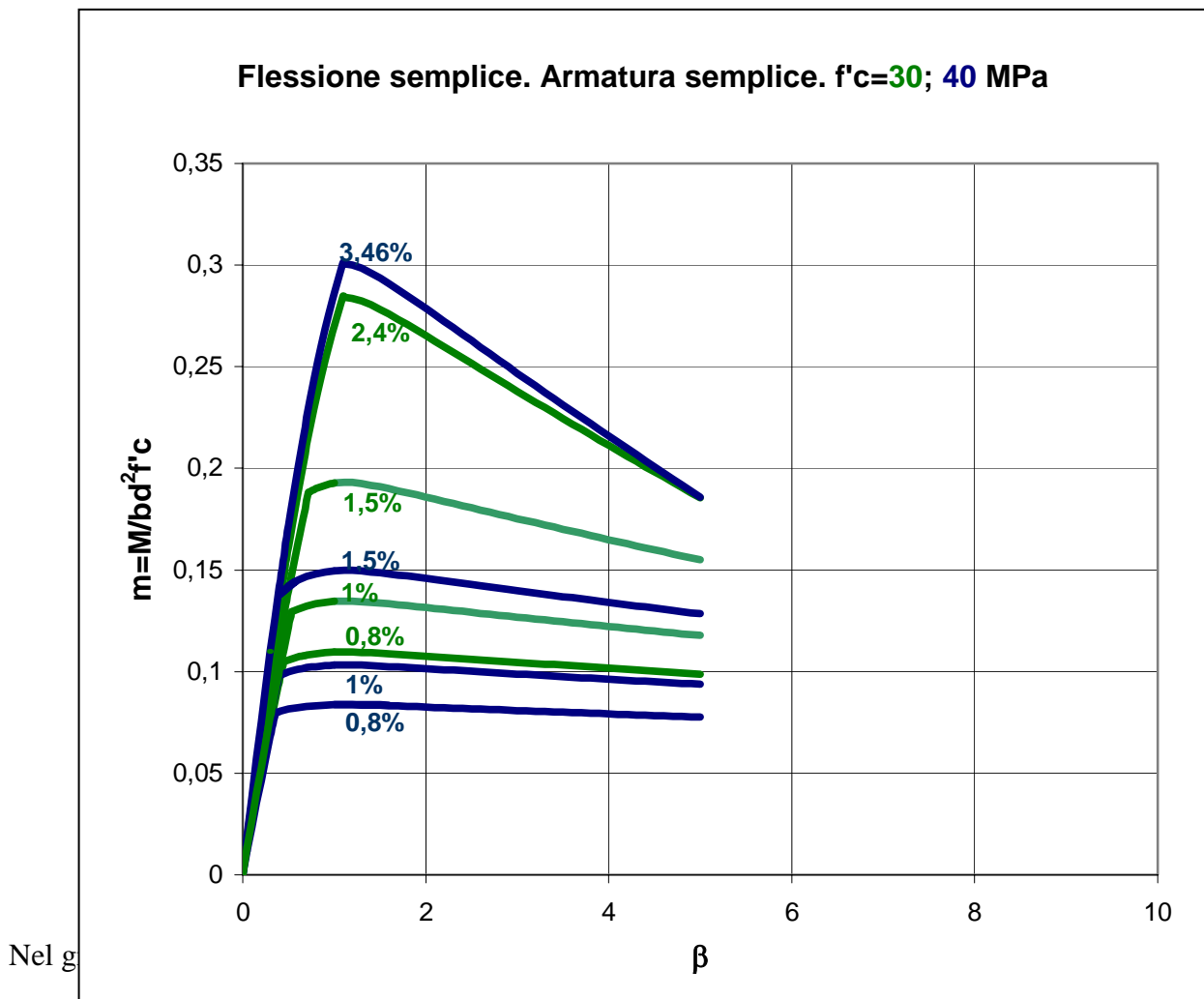
L'equilibrio orizzontale fornisce

$$\frac{\bar{y}}{d} = \frac{3}{3\beta - \beta^2} \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c}$$

e l'equilibrio alla rotazione il momento adimensionale

$$m = \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 \frac{8\beta - 3\beta^2}{12} + \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right)$$

Con le equazioni precedenti si descrivono le curve complete $m - \beta$, come indicato nel grafico seguente.

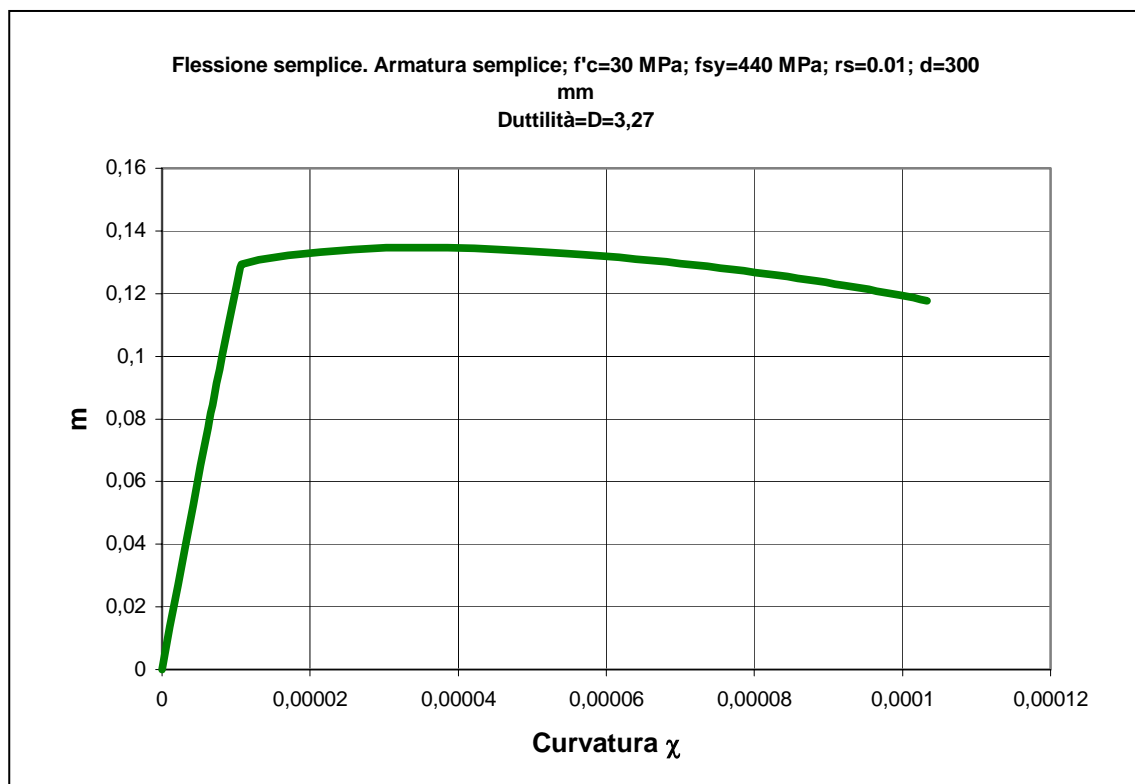


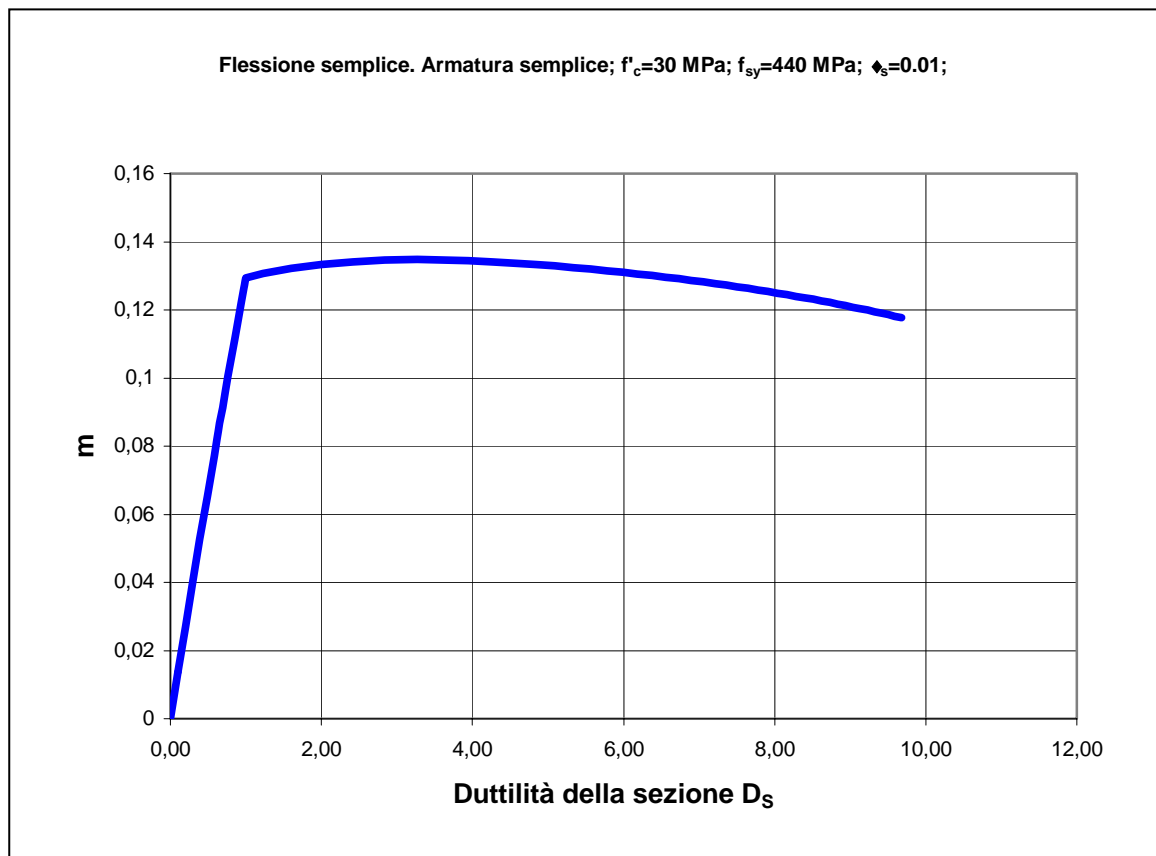
$$\chi = \frac{\beta \varepsilon'_c}{\bar{y}}$$

Introducendo la duttilità della sezione, espressa dal rapporto tra la curvatura al momento ultimo e quella a incipiente snervamento dell'armatura

$$D_s = \frac{\chi_u}{\chi_y}$$

la figura successiva mostra l'andamento del momento in funzione di essa per i valori delle quantità indicati.





L'aumento di armatura nella sezione, necessaria per far fronte a maggiori sollecitazioni flettenti, richiede, per l'equilibrio, una maggiore estensione della zona compressa di conglomerato. Ciò comporta l'abbassamento dell'asse neutro e produce una riduzione della deformazione nell'armatura che può rientrare all'incipiente snervamento o in campo elastico. Questo fatto annulla la duttilità della sezione nella prima situazione o induce fragilità nella seconda. La sezione può essere riportata in duttilità introducendo un'armatura compressa, in quanto ciò produce un riinnalzamento dell'asse neutro. La presenza di azione normale, invece, produce di nuovo un abbassamento dell'asse neutro e conduce a riduzione o annullamento della duttilità.

Quindi, la presenza di armatura in zona compressa favorisce la duttilità della sezione, mentre la presenza di azione normale ne favorisce la fragilità.

Presenza di armatura compressa e di azione normale

Consideriamo il caso in cui l'armatura compressa sia allo snervamento.

Con riferimento ai simboli in figura, avendo posto

$$A'_s = \alpha A_s = \rho'_s bd = \alpha \rho_s bd$$

L'equilibrio orizzontale fornisce

$$\frac{\frac{2}{3} + \ln \beta}{\beta} b \bar{y} f'_c - \rho_s b d f_{sy} (1 - \alpha) - N = 0$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \ln \beta}{\beta} b \bar{y} f'_c - b d f_{sy} \left[\rho_s (1 - \alpha) + \frac{N}{b d f_{sy}} \right] = 0$$

che mostra come l'armatura compressa equivalga a una riduzione di armatura tesa in una sezione a semplice armatura e l'azione normale a un aumento.

Poiché $\beta_{max}=1.108$, l'equazione fornisce

$$\frac{\bar{y}}{d} = 1.44 \left[\rho_s (1 - \alpha) + \nu \right] \frac{f_{sy}}{f'_c}$$

Avendo posto

$$\nu = \frac{N}{b d f_{sy}}$$

Se l'entità di azione normale e di armatura compressa sono tali per cui l'armatura tesa è a incipiente snervamento, la posizione dell'asse neutro è data, come già visto in precedenza, dalla relazione

$$\frac{\bar{y}_o}{d} = \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_{so}}{\beta_{max} \epsilon'_c}} = \frac{1}{1 + \frac{f_{sy}}{2.216 e f'_c}}$$

In tale situazione, il confronto di questa espressione con l'analogia precedente fornisce

$$\rho_{so} = \frac{0.694 \frac{1}{1 + \frac{f_{sy}}{2.216 e f'_c}} \frac{f'_c}{f_{sy}} - \nu}{1 - \alpha}$$

valore critico del rapporto geometrico di armatura.

Per $\alpha = \nu = 0$, si torna all'espressione per il caso di flessione semplice a semplice armatura.

Nella tabella seguente sono riportati i valori critici per differenti classi di conglomerato e per i valori delle variabili indicati

Rapporto critico di armatura

f'_c	f_{sy}	E_c	e	α	ν	ρ_{so}
30	440	30030	6,86	0,2	0,1	0,0317
40	440	34130	6,04	0,2	0,1	0,0458
50	440	37175	5,54	0,2	0,1	0,0610
60	440	39526	5,21	0,2	0,1	0,0771
70	440	41396	4,98	0,2	0,1	0,0939
80	440	42918	4,80	0,2	0,1	0,1113
90	440	44183	4,66	0,2	0,1	0,1292
100	440	45249	4,55	0,2	0,1	0,1476
110	440	46160	4,46	0,2	0,1	0,1663
120	440	46948	4,39	0,2	0,1	0,1853
130	440	47636	4,32	0,2	0,1	0,2045
140	440	48243	4,27	0,2	0,1	0,2240

Si nota, dall'entità dei valori, la notevole influenza sulla duttilità della sezione che possono avere i conglomerati ad alta e altissima resistenza.

A questo proposito, l'impiego di conglomerati ad alta e altissima resistenza introduce nella sezione una elevata capacità rotazionale che è capace di portare in trazione e fino allo snervamento l'armatura superiore che normalmente è compressa. Di seguito si illustra questo caso.

Flessione semplice

Armature superiore e inferiore tese e allo snervamento

Nel caso di armature superiore e inferiore tese e allo snervamento, l'equilibrio alla traslazione fornisce, con i soliti significati dei simboli, l'equazione

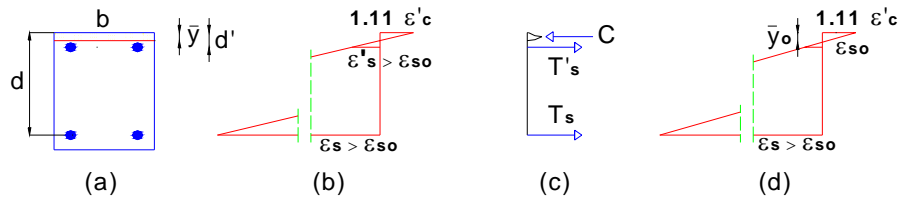


Fig. 5 Sezione inflessa a rottura con armature entrambe tese allo snervamento.

$$\frac{2}{3} + \ln \beta$$

$$\frac{b \bar{y} f'_c}{\beta} - b d f_{sy} \rho_s (1 + \alpha) = 0$$

Da cui

$$\frac{\bar{y}}{d} = \frac{\rho_s (1 + \alpha) \beta \frac{f_{sy}}{f'_c}}{\frac{2}{3} + \ln \beta}$$

Il momento interno adimensionale è

$$m = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2} \left(\frac{\bar{y}}{d} \right)^2 - (1 + \alpha) \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \frac{\bar{y}}{d} + \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \left(1 + \alpha \frac{d'}{d} \right)$$

Il valore massimo si ha, come al solito, per $\beta = 1.108$, e quindi

$$\frac{\bar{y}_u}{d} = 1.444(1 + \alpha) \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c}$$

Procedendo in maniera analoga ai casi precedenti, si deduce **il rapporto di armatura inferiore che produce l'incipiente snervamento di quella superiore**, che chiamiamo ancora **rapporto di armatura critico**

$$\rho'_{so} = \frac{\frac{d}{d'} \left(\ln 1.108 + \frac{2}{3} \right) f'_c}{1 + \frac{f_{sy}}{2.216 e f'_c}} \frac{f'_c}{1.108(1 + \alpha) f_{sy}}$$

ovvero

$$\rho'_{so} = \frac{0.7692 \frac{d}{d'} f'_c}{1 + \frac{f_{sy}}{2.216 e f'_c}} \frac{f'_c}{1.108(1 + \alpha) f_{sy}}$$

Per $\alpha = 0$, la formula riconduce a quella per sezione a semplice armatura.

2.1.7 Curva completa m- β

Per la descrizione completa della relazione momento-indice di deformazione occorre considerare le condizioni di equilibrio nei seguenti tre campi (Fig. 6):

$0 \leq \beta \leq \beta_y$, dove β_y è il valore corrispondente all'incipiente snervamento dell'armatura inferiore;

$\beta_y \leq \beta \leq \beta'_y$, dove β'_y è il valore corrispondente all'incipiente snervamento dell'armatura superiore;

$\beta'_y \leq \beta \leq 1$, che precede il campo con $\beta \geq 1$ già considerato.

Nel primo intervallo, con riferimento alla Fig. 6 (b, c), si ottengono le seguenti espressioni

$$\left(\frac{\bar{y}}{d} \right)^2 + \frac{6 \rho_s e (1 + \alpha) \bar{y}}{3 - \beta} - \frac{6 \rho_s e}{3 - \beta} \left(1 + \alpha \frac{d'}{d} \right) = 0 \quad (18)$$

$$m = \frac{8\beta - 3\beta^2}{12} \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + 2\alpha\rho_s e\beta \frac{\left(\frac{d'}{d} - \frac{\bar{y}}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}} + 2\rho_s e\beta \frac{\left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}} \quad (19)$$

Nel secondo intervallo, con riferimento alla Fig. 6 (d, e), si ottiene

$$\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 - \frac{6}{3\beta - \beta^2} \left(\frac{\psi}{2} - \alpha\rho_s e\beta\right) \frac{\bar{y}}{d} - \frac{6\alpha\rho_s e}{3 - \beta} \frac{d'}{d} = 0 \quad (20)$$

$$m = \frac{8\beta - 3\beta^2}{12} \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + 2\alpha\rho_s e\beta \frac{\left(\frac{\bar{y}}{d} - \frac{d'}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}} + \psi \left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right) \quad (21)$$

Nel terzo intervallo, con riferimento alla Fig. 6 (f, g), si ottiene

$$\frac{\bar{y}}{d} = \psi \frac{3(1 + \alpha)}{3\beta - \beta^2} \quad (22)$$

$$m = \frac{8\beta - 3\beta^2}{12} \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + \alpha\psi \left(\frac{d'}{d} - \frac{\bar{y}}{d}\right) + \psi \left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right) \quad (23)$$

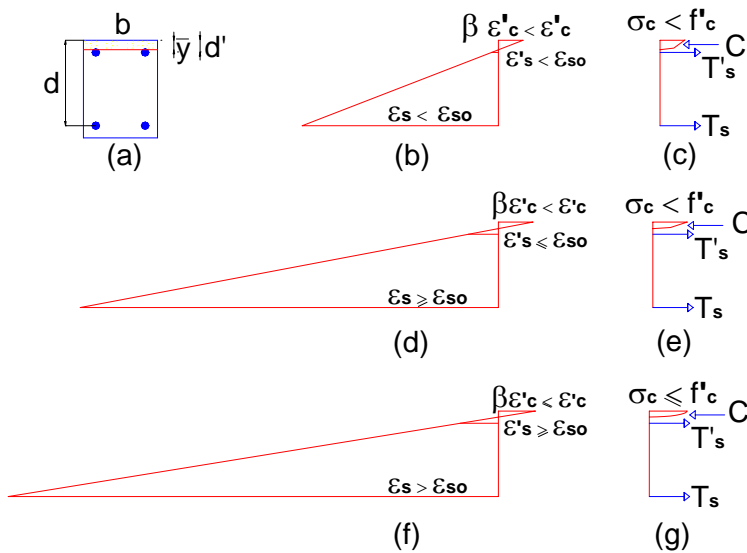


Figura 6. Stati della sezione nei campi: $0 \leq \beta \leq \beta_y$ (b,c); $\beta_y \leq \beta \leq \beta'_y$ (d,e); $\beta'_y \leq \beta \leq 1$ (f,g)

2.1.8 Armatura superiore tesa o compressa e in campo elastico

Nel caso in cui l'armatura superiore sia tesa o compressa e in campo elastico e quella inferiore allo snervamento, alla rottura si ottengono le seguenti espressioni (Fig. 7).

$$\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 - (\psi - 2\rho_s e \alpha \beta) \frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln \beta} \frac{\bar{y}}{d} - \frac{2\rho_s e \alpha \beta^2 \frac{d'}{d}}{\frac{2}{3} + \ln \beta} = 0 \quad (24)$$

$$m = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2} \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + \psi \left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right) + 2\alpha\rho_s e \beta \frac{\left(\frac{\bar{y}}{d} - \frac{d'}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}} \quad (25)$$

Se la quantità $(\bar{y} - d')$ è negativa significa che l'armatura superiore è tesa.

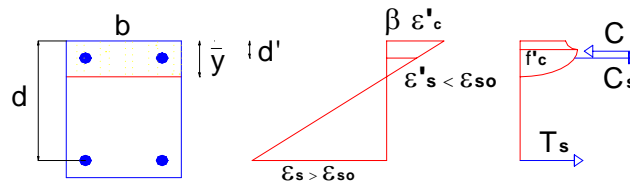


Figura 7. Stato della sezione in cui l'armatura superiore è tesa o compressa e in campo elastico.

3 VERIFICA DEI RISULTATI

Il controllo dell'attendibilità dei risultati analitici prodotti viene fatto utilizzando i risultati sperimentali ottenuti da Shin et al. (1989) su tre serie di travi inflesse realizzate con conglomerati di moderata, alta e altissima resistenza. In Fig. 8 è descritto lo schema statico di prova e la sezione delle travi. Le variabili in gioco erano: resistenza del conglomerato e percentuale delle armature. Il conglomerato aveva resistenze cilindriche di 28, 83 e 103 MPa. Da queste sono state derivate, in questa sede, le corrispondenti resistenze cubiche dividendole per 0.8. L'armatura era doppia e simmetrica ($\alpha=1$), costituita in totale da 4 barre longitudinali dei diametri di 10, 16 e 29 mm, cui corrispondono le percentuali di 0.37, 1.05 e 3.5. La tensione di snervamento era di 440 MPa.

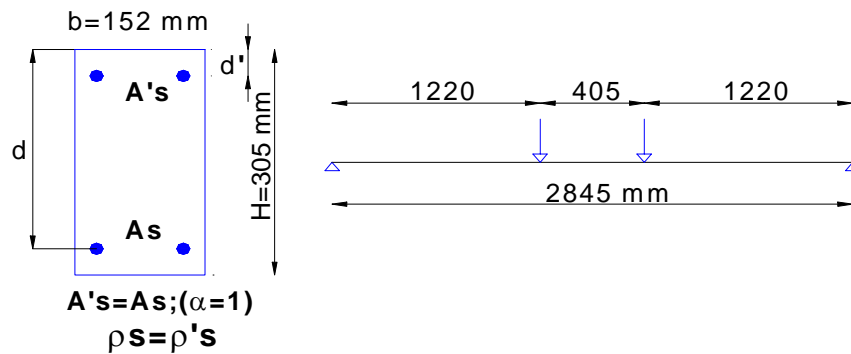


Figura 8. Sezione delle travi e schema statico di prova.

Nella Tabella 3 sono riportate le caratteristiche geometriche e meccaniche delle travi esaminate e i valori delle grandezze necessarie per i calcoli. In particolare, il modulo E_c (in MPa) è calcolato con la seguente formula sperimentale, già utilizzata in precedenza

$$E_c = \frac{10^5 f'_c}{48 + 1.73 f'_c} \quad (26)$$

Le serie B3, B5, C3 e C5 hanno valori dell'indice di fragilità i minori di uno e quindi implicano lo snervamento di entrambe le armature in fase di rottura, mentre per le altre serie l'armatura è tesa e in campo elastico, tranne che per la serie A9, con il più alto valore di i , che è compressa e in campo elastico. Sono stati calcolati, con le formule precedenti, i momenti massimi e quelli all'incipiente snervamento dell'armatura inferiore, e sono stati eseguiti i confronti tra valori sperimentali e calcolati. Sono stati inoltre calcolati i valori di deformazione e di duttilità locale e globale e sono stati confrontati con quelli sperimentali.

Sono stati impiegati i seguenti simboli per le grandezze utilizzate e riportate nelle figure seguenti

M_u = momento massimo sperimentale;

M_{uc} = momento massimo calcolato;

M_{yc} = momento calcolato allo snervamento dell'armatura inferiore;

σ'_s = tensione nell'armatura superiore al momento della rottura (segno meno = compressione);

Δ_u, Δ_y = spostamenti in mezzzeria della trave in corrispondenza dei momenti sperimentali massimo e di snervamento;

$D = \Delta_u / \Delta_y$ = duttilità reale della trave

Δ_{uc}, Δ_{yc} = spostamenti in mezzzeria calcolati a rottura e allo snervamento;

$D_c = \Delta_{uc} / \Delta_{yc}$ = duttilità calcolata della trave;

χ_{max} = curvatura della sezione per M_{uc} ;

χ_y = curvatura della sezione per M_{yc} ;

$D_s = \chi_{max} / \chi_y$ = duttilità della sezione;

4 ANALISI DEI RISULTATI E CONSIDERAZIONI

Nel caso di travi poco armate il valore calcolato del momento massimo è sensibilmente inferiore a quello sperimentale, e ciò per qualsiasi valore di resistenza del conglomerato. Questo fatto è spiegabile soltanto se l'acciaio dell'armatura inferiore raggiunge il campo di incrudimento conseguendo valori di sforzo tendenti a quello di rottura.

In Fig. 9 è riportata la distribuzione dei valori M_u/M_{uc} in funzione dell'indice di fragilità i .

Tabella 3 Caratteristiche geometriche e meccaniche delle travi

Trave	Res. cil. $f'_{c,y1}$ (MPa)	Res. cub. f'_c (MPa)	E_c (Eq.34) (MPa)	$e=E_s/E_c$	$10^3 \varepsilon'_c$	$\rho_s=\rho'_s$ (%)	ρ_{s0} (%)	$i=\rho_s/\rho_{s0}$	d (mm)	d' (mm)	d'/d
A3P11	26.9	33	31402	6.560	2.102	0.37	0.291	1.270	251	54	0.215
A3P12	27.9	35	32243	6.389	2.171	0.37	0.315	1.174	251	54	0.215
A3P21	29.0	36	32644	6.310	2.206	0.37	0.326	1.133	251	54	0.215
A3P22	29.2	36	32644	6.310	2.206	0.37	0.326	1.133	251	54	0.215
A5P11	29.4	37	33033	6.236	2.240	1.05	0.354	2.969	249	56	0.225
A5P12	29.5	37	33033	6.236	2.240	1.05	0.354	2.969	249	56	0.225
A5P21	29.6	37	33033	6.236	2.240	1.05	0.354	2.969	249	56	0.225
A5P22	30.2	38	33410	6.166	2.227	1.05	0.366	2.870	249	56	0.225
A9P11	30.2	38	33410	6.166	2.227	3.50	0.432	8.093	241	64	0.266
A9P12	30.3	38	33410	6.166	2.227	3.50	0.432	8.093	241	64	0.266
A9P21	30.3	38	33410	6.166	2.227	3.50	0.432	8.093	241	64	0.266
A9P22	33.3	41	34474	5.975	2.378	3.50	0.476	7.351	241	64	0.266
B3P11	103.0	129	47572	4.330	5.423	0.37	1.617	0.229	251	54	0.215
B3P12	104.0	130	47636	4.324	5.458	0.37	1.632	0.227	251	54	0.215
B3P21	99.9	125	47304	4.355	5.285	0.37	1.556	0.238	251	54	0.215
B3P22	104.0	130	47636	4.324	5.458	0.37	1.632	0.227	251	54	0.215
B5P11	98.0	122	47093	4.374	5.181	1.05	1.581	0.664	249	56	0.225
B5P12	103.7	130	47636	4.324	5.458	1.05	1.708	0.615	249	56	0.225
B5P21	103.0	129	47572	4.330	5.423	1.05	1.692	0.620	249	56	0.225
B5P22	103.9	130	47636	4.324	5.458	1.05	1.708	0.615	249	56	0.225
B9P11	103.0	129	47572	4.330	5.423	3.50	2.000	1.750	241	64	0.266
B9P12	103.9	130	47636	4.324	5.458	3.50	2.019	1.733	241	64	0.266
B9P21	103.9	130	47636	4.324	5.458	3.50	2.019	1.733	241	64	0.266
B9P22	103.9	130	47636	4.324	5.458	3.50	2.019	1.733	241	64	0.266
C3P11	84.3	105	45722	4.506	4.593	0.37	1.256	0.294	251	54	0.215
C3P12	84.3	105	45722	4.506	4.593	0.37	1.256	0.294	251	54	0.215
C3P21	84.3	105	45722	4.506	4.593	0.37	1.256	0.294	251	54	0.215
C3P22	84.3	105	45722	4.506	4.593	0.37	1.256	0.294	251	54	0.215
C5P11	84.3	105	45722	4.506	4.593	1.05	1.256	0.836	249	56	0.225
C5P12	84.3	105	45722	4.506	4.593	1.05	1.256	0.836	249	56	0.225
C5P21	84.3	105	45722	4.506	4.593	1.05	1.256	0.836	249	56	0.225
C5P22	84.3	105	45722	4.506	4.593	1.05	1.256	0.836	249	56	0.225
C9P11	84.3	105	45722	4.506	4.593	3.50	1.256	2.785	241	64	0.266
C9P12	84.3	105	45722	4.506	4.593	3.50	1.256	2.785	241	64	0.266

La migliore concordanza tra momento calcolato e sperimentale si ha per il valore più elevato di ρ_s e per qualsiasi f'_c

Con il valore intermedio di armatura e per qualsiasi f'_c , si ha un valore del rapporto compreso tra 1.16 e 1.10. Anche per queste travi è da presumere che si siano raggiunti valori di sforzo nell'armatura inferiore superiori alla tensione di snervamento.

In ogni caso, il rapporto tra i momenti è maggiore di uno, quindi la previsione della resistenza flessionale risulta conservativa.

Lo sforzo calcolato nell'armatura superiore è risultato decrescere al crescere dell'indice di fragilità, diventando di compressione per i valori più elevati di esso. In Fig. 10 è mostrato l'andamento di detto sforzo con l'indice i .

Per valori molto bassi di i , la curva di tendenza mostra che la tensione può raggiungere entità appartenenti alla fase di incrudimento dell'acciaio e a maggior ragione nell'armatura inferiore.

La duttilità della sezione decresce al crescere di i . I valori più alti di duttilità si hanno per le sezioni con minore armatura e con maggiore resistenza del conglomerato (Serie B3 e C3). I valori più bassi si hanno con quelli più alti di armatura e con quelli più bassi di resistenza.

Il valore più alto in assoluto di duttilità si è conseguito con il minore valore di ρ_s e il più elevato di f'_c , insieme con il più basso valore di i e viceversa.

In Fig. 11 sono riportati i valori calcolati della duttilità della sezione in funzione dell'indice i .

Per quanto attiene la duttilità delle travi, i dati sperimentali mostrano valori più elevati per la serie C3 ($\rho_s=0.37\%$, $f'_c=105$ MPa) e precisamente da 12 a 21, mentre quelli calcolati sono risultati pari a 21. Nel complesso i valori sperimentali vanno da 1.4 a 21 e quelli calcolati da 1.1 a 35 con il valore più alto per la serie B3 ($\rho_s=0.37\%$, $f'_c=130$ MPa, $i=0.23$). Concordanza tra valori sperimentali e calcolati si è riscontrata, in particolare, per le serie A5 e C3 e minore per le serie A9 e C5 mentre per le restanti serie si ha una discordanza sensibile. Le curve di tendenza per la duttilità effettiva e per quella calcolata mostrano che, in generale, il calcolo sovrastima la duttilità, anche se i valori sperimentali, che risultano piuttosto dispersi, sono in parte distribuiti al di sopra della curva analitica e in parte al di sotto.

In Fig. 12 sono riportate le distribuzioni dei valori di duttilità globali delle travi, calcolati e sperimentali, in funzione dell'indice di fragilità.

Nella figura 13 sono tracciati per alcune travi i diagrammi m/m_{max} in funzione di χ/χ_y . Per ognuna di esse, i campi di duttilità considerati sono quelli corrispondenti a uno stesso intervallo dell'indice di deformazione β , e cioè tra zero e 5 (Travi A5P11, C5P11 e B5P12)

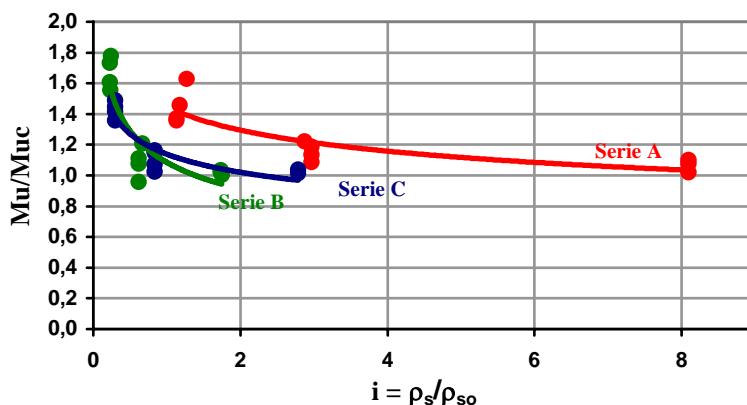


Figura 9. Distribuzione dei valori del rapporto M_u/M_{uc} in funzione dell'indice di fragilità i .

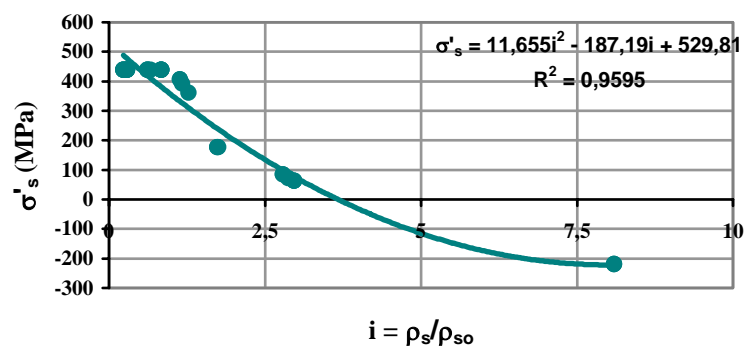


Figura 10. Andamento dello sforzo calcolato nell'armatura superiore con l'indice di fragilità.

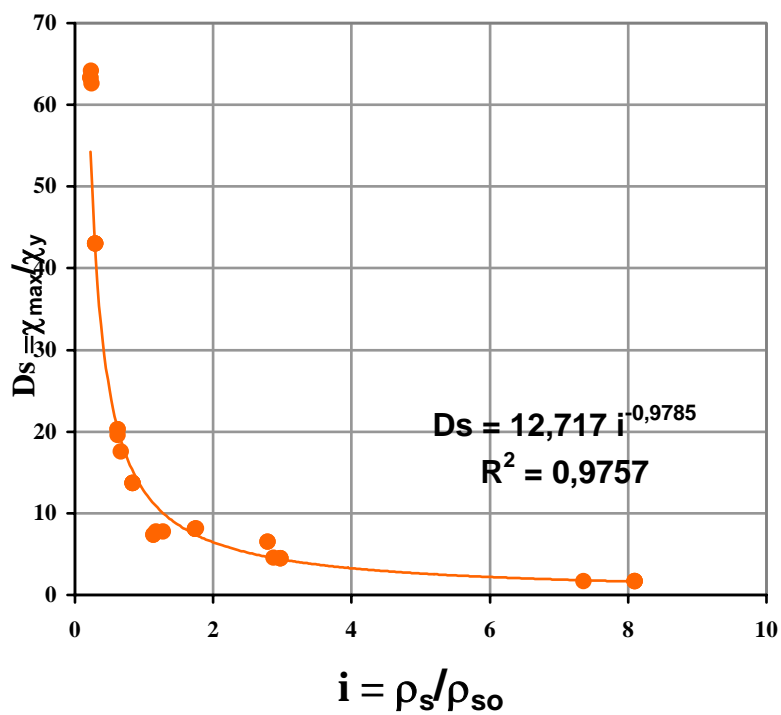


Figura 11. Andamento della duttilità della sezione con l'indice di fragilità i .

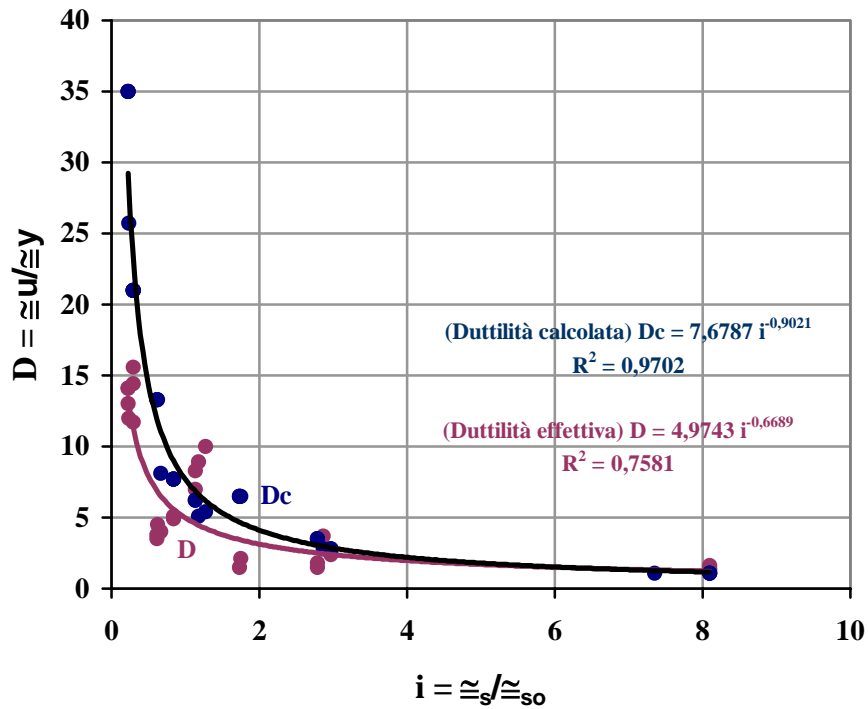


Figura 12. Duttilità delle travi sperimentali e calcolate in funzione dell'indice di fragilità.

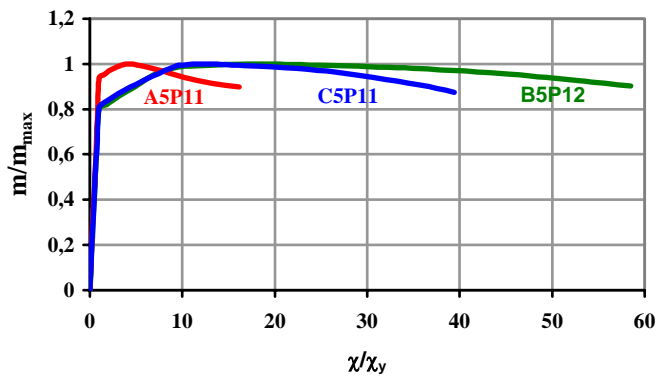


Figura 13. Diagrammi m/m_{max} in funzione di χ/χ_y , per le travi ASP11, CSP11 e B5P12.

5 CONCLUSIONI

L'impiego di conglomerati ad alta e ad altissima resistenza produce notevoli incrementi di duttilità locale e globale in un elemento inflesso. I valori che si ottengono sono tanto maggiori quanto minore è il valore dell'indice di duttilità ovvero quanto maggiore è il suo inverso. I valori più elevati si conseguono con bassi valori di percentuale di armatura associati ad alti valori di resistenza del conglomerato. Naturalmente, valori troppo ridotti di armatura non sono utili perché penalizzano la resistenza flessionale mentre, d'altra parte, valori troppo elevati condizionano la duttilità delle travi. Per quanto verificato nel presente articolo, un

valore ottimale, sia ai fini della resistenza sia della duttilità, si consegue con percentuali di armatura dell'1% e con resistenze del conglomerato intorno ai 100 MPa. Un aspetto rilevante riscontrato è quello che, nel caso di armatura doppia, l'impiego di conglomerati ad alta e altissima resistenza fa sì che l'armatura superiore della sezione risulti tesa anche fino allo snervamento, aspetto che produce elevata duttilità.

Per quanto attiene, poi, gli aspetti analitici concernenti i conglomerati ad altissima resistenza, si ritiene che non sussistano ragioni per differenziarli, nella trattazione degli elementi inflessi, da quelli riguardanti il conglomerato di resistenza ordinaria.

Bibliografia

Bortolotti, L., 1994. *Influence of concrete tensile ductility on compressive strength of confined columns*, *Journal of Materials in Civil Engineering*, 6(4): 542-563.

Bortolotti, L., 1996. *Analisi plastica e relazioni costitutive per il conglomerato negli stati di tensione monoassiali*, *Atti dell'VIII Congresso AIMETA*, Vol.1. Torino, 9 Sett.-3 Ott. 1996.

Shin, S. W., Ghosh, S., K., Moreno, J., 1989. *Flexural ductility of ultra-strength concrete members*, *ACI Structural Journal*, 86(4): 394-400.

Flessione

Conglomerato semplice

L'analisi del comportamento a rottura di una sezione inflessa in semplice conglomerato è molto significativa per spiegare la differenza di valore tra la resistenza a trazione da prova di flessione, detta *modulo di rottura a trazione* f_r , e quella da trazione diretta.

L'analisi viene condotta considerando la conservazione delle sezioni piane, regime di softening nella parte tesa della sezione e regime elastico nella parte compressa. Per quest'ultima, può considerarsi un diagramma parabolico di sforzo che però conduce a una formulazione per la posizione dell'asse neutro un po' complessa. Perciò si utilizzerà un diagramma di sforzo lineare, anche perché gli sforzi nel conglomerato sono bassi e le differenze con quelli della formulazione lineare non sono rilevanti.

Con riferimento alla figura, la zona in trazione è interessata da un sistema di sforzi che fanno riferimento alle relazioni costitutive in trazione monoassiale

$$\sigma_t = f_t' \left(2 \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t'} - \frac{\varepsilon_t^2}{\varepsilon_t'^2} \right)$$

$$\sigma_t = f_t' \frac{\varepsilon_t'}{\varepsilon_t}$$

Essendo, con riferimento al diagramma lineare delle deformazioni nella sezione

$$\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon'_t} = \beta \frac{y}{\bar{y}}$$

le equazioni dei rami ascendente e discendente per lo sforzo di trazione nell'ambito della sezione sono

$$\sigma_t = f'_t \left(2 \frac{\beta y}{\bar{y}} - \frac{\beta^2 y^2}{\bar{y}^2} \right)$$

$$\sigma_t = f'_t \frac{\bar{y}}{\beta y}$$

mentre per la zona compressa si ha

$$\sigma_c = f'_c \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon'_c} = f'_c \frac{y\beta}{\bar{y}k}$$

Le risultanti degli sforzi di trazione e di compressione sono

$$T = b\bar{y}f'_t \frac{\frac{2}{3} + \ln \beta}{\beta}$$

$$C = \frac{bf'_c\beta}{2k} \frac{(H - \bar{y})^2}{\bar{y}}$$

L'equilibrio alla traslazione fornisce

$$\left(\frac{\bar{y}}{H} \right)^2 - \frac{2}{A} \frac{\bar{y}}{H} + \frac{1}{A} = 0$$

con

$$A = 1 - 2 \frac{\frac{2}{3} + \ln \beta}{\beta^2}$$

L'equilibrio alla rotazione fornisce il momento adimensionalizzato

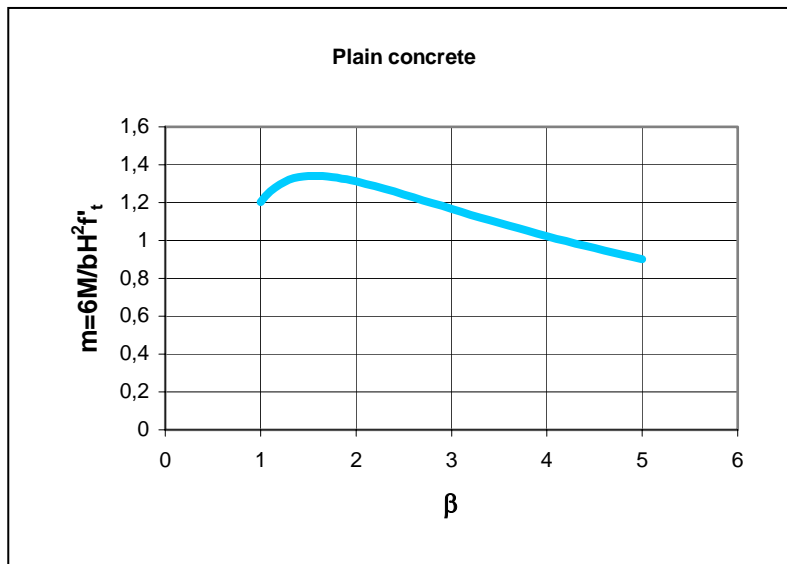
$$m_t = \frac{6M_t}{bH^2 f'_t} = \left(\frac{\bar{y}}{H} \right)^2 \left[2\beta \frac{\left(1 - \frac{\bar{y}}{H} \right)^3}{\left(\frac{\bar{y}}{H} \right)^3} + \frac{12\beta - 7}{2\beta^2} \right]$$

La curva del momento presenta un massimo di **1.34** circa per $\beta = 1.55$.

La resistenza a trazione da flessione è quindi superiore alla resistenza a trazione diretta.

Il regime di softening che si instaura nella sezione causa l'apparente aumento di resistenza a trazione del conglomerato.

Nella figura seguente è riportato il diagramma del momento descritto nel campo del softening.



Considerazioni di progetto in flessione semplice
Armatura semplice

Indichiamo con M_d il momento di progetto e con γ il coefficiente di amplificazione di esso per giungere al valore del momento di rottura

$$M_u = \gamma M_d = \gamma b d^2 f'_c m_u$$

con

$$m_u = \frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} - 0.553 \left(\frac{\rho_s f_{sy}}{f'_c} \right)^2 = \psi - 0.553 \psi^2$$

Si deriva, quindi l'altezza utile

$$d = \sqrt{\frac{\gamma M_d}{b f'_c m_u}} = \sqrt{\frac{\gamma}{f'_c (\psi - 0.553 \psi^2)}} \sqrt{\frac{M_d}{b}} = \alpha \sqrt{\frac{M_d}{b}}$$

avendo posto

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{f'_c (\psi - 0.553 \psi^2)}}$$

Esempio

$M_d=100000$ Nm; $\gamma=1.5$; $b=300$ mm; $f_{sy}=440$ Mpa

Nella tabella seguente sono riportate le calcolazioni per i valori delle grandezze descritte e il confronto tra il momento ultimo e quello calcolato, in via semplificata, come indicato nella terz'ultima colonna. Il confronto tra i due momenti mostra dei divari molto contenuti.

f'_c	f_{sy}	ρ_s	ψ	γ	γ/f'_c	M_d (Nmm)	b (mm)	M_d/b
30	440	0,01	0,147	1,5	0,05	1E+08	300	333333
30	440	0,005	0,073	1,5	0,05	1E+08	300	333333
40	440	0,01	0,110	1,5	0,0375	1E+08	300	333333
40	440	0,005	0,055	1,5	0,0375	1E+08	300	333333
100	440	0,01	0,044	1,5	0,015	1E+08	300	333333
100	440	0,005	0,022	1,5	0,015	1E+08	300	333333

$\psi-0,553\psi^2$	α	d (mm)	$M_s=0,95\rho_s b d f_{sy} d$	$M_u=\gamma M_d$	M_u/M_s
0,135	0,609	352	155077847	150000000	0,97
0,070	0,843	487	148523107	150000000	1,01
0,103	0,602	348	151729719	150000000	0,99
0,053	0,839	484	146970095	150000000	1,02
0,043	0,591	341	146053781	150000000	1,03
0,022	0,831	480	144255006	150000000	1,04

RESISTENZA A PRESSOFLESSIONE

Limiti di duttilità di sezioni armate in conglomerato ad alta e altissima resistenza soggette a pressoflessione

1. INTRODUZIONE

È importante, per una sezione in conglomerato armato soggetta a pressoflessione, stabilire il limite di passaggio dal comportamento duttile a quello fragile e, inoltre, dirimere definitivamente il dubbio se l'impiego di conglomerati ad altissima resistenza influisca positivamente o negativamente sulla duttilità delle sezioni e degli elementi strutturali o, in altri termini, favorisca il superamento del *limite di fragilità*. È quindi necessario individuare con precisione tale limite di fragilità al variare dei diversi parametri intervenenti nel problema, e cioè, principalmente, la resistenza del conglomerato e dell'acciaio, i valori delle percentuali di armatura presenti nella sezione e l'entità dell'azione normale agente nella sezione e della sua eccentricità.

A tale scopo, esamineremo il comportamento a rottura di una sezione al variare dei principali parametri a disposizione per cogliere, in particolare, le differenze connesse all'impiego di conglomerati ad alta e altissima resistenza.

In precedenza è stato mostrato che i conglomerati ad alta e altissima resistenza producono notevoli incrementi di duttilità flessionale delle sezioni e delle strutture. In particolare, è stato evidenziato che nel caso di doppia armatura la presenza di un conglomerato ad altissima resistenza può condurre l'armatura superiore della sezione, che normalmente è compressa, a uno stato di

snervamento per trazione. Anche per le sezioni pressoinflesse occorrerà vedere in quali circostanze si possa verificare una analoga situazione.

Con tali premesse ci aspettiamo che, nel caso più generale, una sezione pressoinflessa possa conseguire a rottura i seguenti stati di sollecitazione interna nelle armature, in dipendenza dell'entità dell'azione normale presente in essa e per fissate caratteristiche geometriche e meccaniche di essa:

- per azione normale N nulla (flessione semplice);
- per N crescente, armature entrambe tese e allo snervamento;
- armatura superiore tesa in campo elastico e inferiore in trazione allo snervamento;
- armatura superiore compressa in campo elastico e inferiore tesa allo snervamento;
- armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore tesa allo snervamento;
- armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore tesa in campo elastico;
- armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore compressa in campo elastico;
- armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore compressa allo snervamento;
- eccentricità nulla, sezione interamente compressa.

Dall'esame dei diversi stati possibili di rottura si determinerà la curva di rottura **azione normale-momento flettente**, detta anche **curva di interazione** azione normale-momento, luogo dei punti (N , M) di rottura della sezione, e si potranno individuare, attraverso i valori delle deformazioni nelle armature, **i campi di duttilità e di fragilità** per la sezione, al variare delle caratteristiche meccaniche e geometriche di essa. In particolare, si potrà vedere se un conglomerato ad altissima resistenza produce maggiore duttilità rispetto a uno di minore resistenza, a parità di tutte le altre condizioni. Inoltre, poiché a ogni coppia di valori (N , M) della curva di rottura corrisponde un valore di **eccentricità** di N nella sezione, sarà utile descrivere la **curva dell'eccentricità in funzione di N** . Per un assegnato valore di eccentricità corrisponderà sulla curva di rottura un punto che risiederà nel campo duttile o in quello fragile della sezione in dipendenza della resistenza di conglomerato che si consideri. Cioè, il confronto di duttilità tra sezioni di differenti conglomerati va fatto a parità di valore di eccentricità.

L'intento è quello di mostrare che, anche nel caso di sezioni pressoinflesse in conglomerato armato, l'impiego di conglomerati ad alta e altissima resistenza costituisce una premessa per conseguire valori di duttilità superiori a quelli ottenibili con conglomerati di resistenza normale o moderata.

2. ANALISI TEORICA

2.1. Ipotesi di base

Per la trattazione analitica riguardante una sezione pressoinflessa in conglomerato armato utilizzeremo le seguenti ipotesi già impiegate in precedenza:

- conservazione della planarità delle sezioni reagenti;
- conglomerato compresso in regime di softening;
- relazione costitutiva per l'acciaio di tipo elastico-perfettamente plastico;
- relazione costitutiva per il conglomerato costituita da un ramo ascendente di tipo parabolico (parabola di Madrid) e da un ramo discendente iperbolico.

Le equazioni dei due rami sono, rispettivamente,

$$\sigma_c = f'_c \left(2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon'_c} - \frac{\varepsilon_c^2}{\varepsilon'^c_2} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_c = \frac{f'_c \varepsilon'_c}{\varepsilon_c} \quad (2)$$

I parametri meccanici impiegati sono i seguenti:

$E_s=206000$ MPa, modulo elastico dell'acciaio;

f_{sy} , tensione di snervamento dell'acciaio;

$\varepsilon_{so}=f_{sy}/E_s$, deformazione dell'acciaio a incipiente snervamento;

f'_c , resistenza cubica del conglomerato;

$\varepsilon'_c=2f'_c/E_c$, deformazione di picco del conglomerato;

E_c , modulo tangente all'origine del conglomerato;

$e=E_s/E_c$, rapporto tra i moduli dei materiali; oppure eccentricità di N:

Per la valutazione di E_c si impiega la formula sperimentale più volte citata

$$E_c = \frac{10^5 f'_c}{48 + 1.73 f'_c} \quad (\text{MPa}) \quad (3)$$

Ciò premesso, consideriamo i diversi stati di rottura possibili per una sezione rettangolare doppiamente armata, secondo l'elenco precedentemente fatto.

2.2. Stati di rottura possibili per una sezione pressoinflessa

2.2.1. Armature tese e allo snervamento

Con riferimento alla Fig. 2, le condizioni di equilibrio producono le seguenti equazioni che forniscono i valori adimensionali della distanza dell'asse neutro e del momento interno al variare dell'indice di deformazione del conglomerato $\beta=\varepsilon_{cmax}/\varepsilon'_c$

$$\frac{\bar{y}}{d} = \left[\psi(1 + \alpha) + \nu \right] \frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln \beta} \quad (4)$$

$$m = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2} \left(\frac{\bar{y}}{d} \right)^2 + \alpha\psi \left(\frac{d'}{d} - \frac{\bar{y}}{d} \right) + \psi \left(1 - \frac{\bar{y}}{d} \right) + \nu \left(\frac{H}{2d} - \frac{\bar{y}}{d} \right) \quad (5)$$

dove $\psi = \rho_s f_{sy} / f'_c$, rapporto meccanico di armatura, $\rho_s = A_s / bd$, rapporto geometrico di armatura, $\alpha = A'_s / A_s = \rho'_s / \rho_s$ e $v = N / bdf'_c$, azione normale adimensionalizzata.

Nel caso particolare di $v=0$ (flessione semplice), il valore massimo di m si ha per $\beta=1.11$ [1] e le (4-5) forniscono le espressioni già viste

$$\frac{\bar{y}_{\max}}{d} = 1.44\psi(1+\alpha) \quad - (6)$$

$$m_{\max} = \psi \left(1 + \alpha \frac{d'}{d} \right) - 0.554(1+\alpha)^2 \psi^2 \quad (7)$$

In tale situazione, la percentuale critica dell'armatura di riferimento ρ_s , e cioè quella percentuale che produce l'incipiente snervamento in trazione dell'armatura superiore, è data da

$$\rho_{so} = \frac{0.695 \frac{d'}{d} f'_c}{1 + \frac{f_{sy}}{2.22ef'_c} f_{sy} (1+\alpha)} \quad (8)$$

dove $e = E_s / E_c$, rapporto tra i moduli di deformazione dei materiali.

Questa espressione permette di stabilire a priori se, in una assegnata sezione soggetta a flessione semplice, entrambe le armature siano tese e allo snervamento al momento della rottura. Se il valore della percentuale di armatura inferiore è minore del valore critico siamo in tale situazione e tanto di più quanto più il loro rapporto è distante dall'unità. Un indice di duttilità della sezione può essere dato dal rapporto tra la deformazione nell'acciaio inferiore e quella di incipiente snervamento.

Fig. 2 Stato di rottura a pressoflessione per sezione a doppia armatura: armature tese a snervamento.

2.2.2. Armatura superiore tesa (o compressa) in campo elastico e inferiore tesa allo snervamento

Con riferimento alla Fig. 3, le condizioni di equilibrio forniscono le seguenti equazioni

$$\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{\psi + \nu}{2} - \alpha\rho_s e\beta\right)\frac{\bar{y}}{d}\frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln\beta} - 2\alpha\rho_s e\frac{d'}{d}\frac{\beta^2}{\frac{2}{3} + \ln\beta} = 0 \quad (9)$$

$$m = \frac{M}{bd^2 f'_c} = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2}\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + 2\alpha\rho_s e\beta\frac{\left(\frac{d'}{d} - \frac{\bar{y}}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}} + \psi\left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right) + \nu\left(\frac{H}{2d} - \frac{\bar{y}}{d}\right) \quad (10)$$

Se la quantità $d' - \bar{y}$ è negativa, l'armatura superiore è compressa e in campo elastico.

Fig. 3 Stato di rottura con armatura superiore tesa o compressa in fase elastica e armatura inferiore tesa a snervamento.

2.2.3. Armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore tesa allo snervamento

Con riferimento alla Fig. 4, le condizioni di equilibrio forniscono le seguenti espressioni

$$\frac{\bar{y}}{d} = [\psi(1 - \alpha) + \nu]\frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln\beta} \quad (11)$$

$$m = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2}\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 - \psi(1 - \alpha)\frac{\bar{y}}{d} + \psi\left(1 - \alpha\frac{d'}{d}\right) + \nu\left(\frac{H}{2d} - \frac{\bar{y}}{d}\right) \quad (12)$$

Fig. 4. Stato di rottura con armatura superiore compressa allo snervamento e armatura inferiore tesa a snervamento

2.2.4. Armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore tesa in campo elastico

Con riferimento alla Fig. 5, le condizioni di equilibrio forniscono

$$\left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + (\alpha\psi + 2\rho_s e\beta - \nu) \frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln \beta} \frac{\bar{y}}{d} + -2\rho_s e \frac{\beta^2}{\frac{2}{3} + \ln \beta} = 0 \quad (13)$$

$$m = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2} \left(\frac{\bar{y}}{d}\right)^2 + \alpha\psi \left(\frac{\bar{y}}{d} - \frac{d'}{d}\right) + +2\rho_s e\beta \frac{\left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right)^2}{\frac{\bar{y}}{d}} + \nu \left(\frac{H}{2d} - \frac{\bar{y}}{d}\right) \quad (14)$$

Fig. 5 Stato di rottura con armatura superiore compressa allo snervamento e armatura inferiore tesa in campo elastico.

2.2.5 Armatura superiore compressa allo snervamento e inferiore compressa in campo elastico

Quando la quantità $\left(1 - \frac{\bar{y}}{d}\right)$ nella Eq. (14) è negativa, l'armatura inferiore è compressa. Valgono, per questo caso, approssimativamente le equazioni del caso precedente, se l'asse neutro cade poco al di sotto del bordo inferiore della sezione.

2.2.6. Armature entrambe compresse allo snervamento

Con riferimento alla Fig. 6, le condizioni di equilibrio conducono approssimativamente alle seguenti espressioni, se l'asse neutro cade poco al di sotto del bordo inferiore della sezione.

$$\frac{\bar{y}}{d} = \left[\nu - (1 + \alpha)\psi \right] \frac{\beta}{\frac{2}{3} + \ln \beta} \quad (15)$$

$$m = \frac{12\beta - 7}{12\beta^2} \left(\frac{\bar{y}}{d} \right)^2 + \alpha\psi \left(\frac{\bar{y}}{d} - \frac{d'}{d} \right) + \psi \left(\frac{\bar{y}}{d} - 1 \right) + \nu \left(\frac{H}{2d} - \frac{\bar{y}}{d} \right) \quad (16)$$

Fig. 6 Stato di rottura con armature entrambe compresse e a snervamento

Per ognuna delle situazioni esaminate occorre determinare il valore di β che produce il massimo valore del momento, il quale rappresenta il momento di rottura della sezione per un assegnato valore di N.

La casistica si completa con la situazione di compressione assiale, in assenza di eccentricità della forza normale.

3. Curve di rottura

Utilizzando le formule precedenti, fissate le caratteristiche geometriche e meccaniche della sezione, si determinano i valori del momento massimo della sezione al variare della azione normale adimensionale ν e si tracciano le **curve di rottura m- ν** .

Per evidenziare le differenze fra le diverse curve di rottura al variare della resistenza del conglomerato e della percentuale di armatura di riferimento, fissati i valori della tensione di snervamento e del rapporto α , è più opportuno descrivere le curve $m f'_c - \nu f'_c$, e cioè delle grandezze M/bd^2 e N/bd che hanno entrambe le dimensioni di uno sforzo..

Nella Fig. 7 sono rappresentate le curve di rottura per una sezione quadrata (150x150 mm) con armatura doppia simmetrica ($\alpha=1$), con tensione di snervamento di **440 MPa**, per due conglomerati di resistenza **50 e 130 MPa**, per due valori della percentuale di armatura di riferimento pari a **1 e 2%** e per un rapporto $d'/d=0.25$.

La curva presenta, ovviamente un raccordo terminale in relazione allo stato della sezione che tende a diventare di pura compressione.

Sul diagramma sono riportate anche le rispettive **curve e/d (eccentricità specifica**, rapporto eccentricità di N ad altezza utile della sezione) in funzione di $\nu f'_c$.

Le curve di rottura presentano un punto di massimo (**punto di fragilità**) il quale segna il passaggio della sezione dal campo duttile (alla sinistra del picco) a quello fragile.

Il *campo duttile* è quello in cui l'armatura inferiore è tesa e allo snervamento; mentre in *quello fragile* l'armatura inferiore è tesa in regime elastico o compressa fino allo snervamento.

Le curve di eccentricità sono importanti per stabilire se, per una assegnata eccentricità, la sezione ricada in campo duttile o fragile.

Per esempio, per $e/d=0.25$ si vede che si ricade in campo fragile in tutti i casi. Per $e/d=0.5$, si è in campo fragile per $f'_c=50$ MPa e in campo duttile per $f'_c=130$ MPa. Per $e/d=0.75$ si ricade in campo duttile in ogni caso ma in maniera più vantaggiosa per il conglomerato di resistenza superiore (maggiore distanza dal punto di fragilità).

Come si vede, il conseguimento di una certa duttilità è correlato ai valori di eccentricità della forza normale che si impiegano e dipende dall'entità di armatura e dalla resistenza del conglomerato utilizzata.

Quindi, in sede di dimensionamento, stabilita una zona del campo di duttilità in cui si voglia ricadere, si possono scegliere i più opportuni valori di armatura e di resistenza dei materiali che insieme con l'eccentricità di progetto in gioco forniscano un punto sulla curva di rottura della sezione ricadente in quell'intervallo di duttilità.

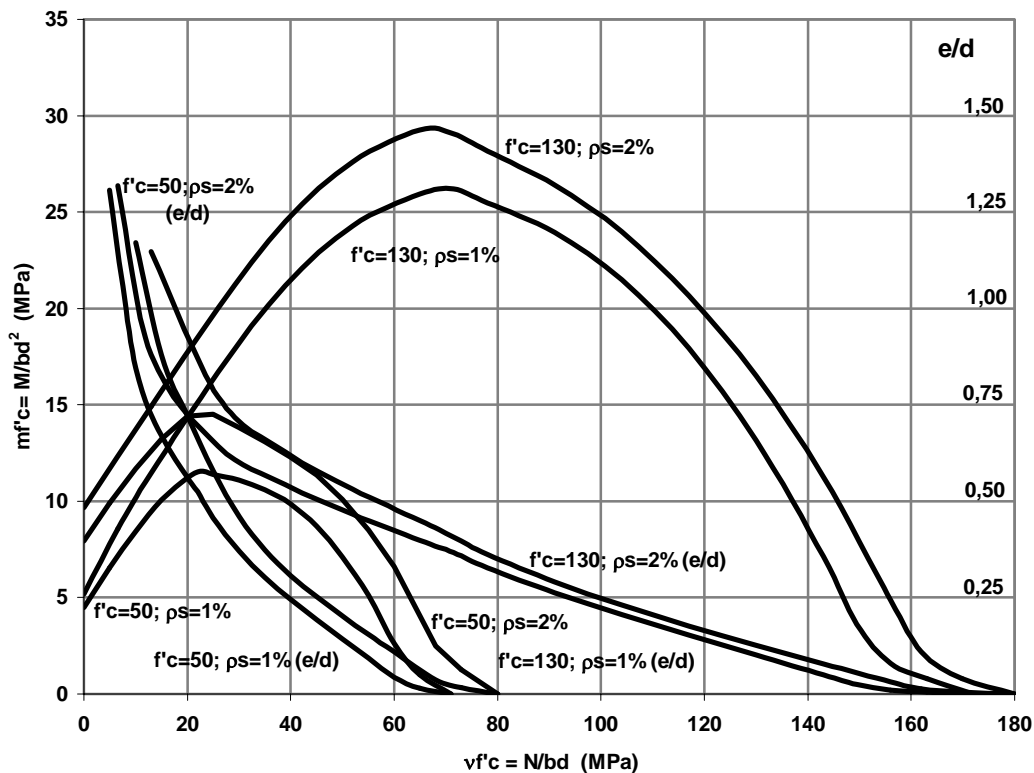


Fig. 7. Curve di rottura e curve di eccentricità per sezione a doppia armatura simmetrica, per due resistenze di conglomerato (50 e 100 MPa), per due percentuali di armatura (1 e 2), per $f_{sy}=440$ MPa e per $d/d'=0.25$.

È stato mostrato che una sezione pressoinflessa in conglomerato ad altissima resistenza può risultare, a rottura, a seconda del valore di eccentricità dell'azione normale presente in essa, in una fra tutte le situazioni possibili per le armature, che vanno da quella in cui esse sono entrambe tese e allo snervamento a quella opposta in cui sono entrambe compresse allo snervamento. La prima situazione estrema è possibile specie quando si è in presenza di un conglomerato ad altissima resistenza. Ciò avviene quando la percentuale di armatura di riferimento (quella inferiore) è minore di quella critica in flessione semplice, e cioè di quella percentuale cui corrisponde, al momento della rottura, l'incipiente snervamento in trazione dell'armatura superiore della sezione.

Per una tale sezione esiste un campo di valori dell'azione normale per cui le armature sono allo snervamento in trazione e, per essa sezione, la duttilità è massima. La duttilità si riduce progressivamente al diminuire dell'eccentricità dell'azione normale e si annulla in corrispondenza del punto di massimo della curva di rottura *momento-azione normale* della sezione. Questo rappresenta il punto di fragilità della sezione e segna il passaggio al campo di assenza di duttilità. Il punto di fragilità dipende dalla tensione di snervamento dell'acciaio, dalla quantità di armature, dalla resistenza del conglomerato e dalla eccentricità. A parità di ogni altro valore dei parametri in gioco, l'impiego di un conglomerato ad alta e altissima resistenza consente di ottenere valori di duttilità superiori rispetto al caso di conglomerati di normale o moderata resistenza. La curva di eccentricità correlata alla curva di rottura permette di dimensionare i parametri della sezione in maniera da conseguire la duttilità voluta.

5. BIBLIOGRAFIA

2004 L. Bortolotti, S. Carta, D. Cireddu. *Comportamento a Flessione e Duttività di Membrature in Conglomerato ad Altissima Resistenza*. Atti del XVI Convegno ANIDIS 2004, Genova, Gennaio 2004.

2002 L. Bortolotti, S. Carta, D. Cireddu. *Limiti di duttilità di sezioni armate in conglomerato ad alta e altissima resistenza soggette a pressoflessione*. Atti delle Giornate AICAP 2002, Bologna, Giugno 2002, pp 93-100.

1991 L. Bortolotti, B. De Nicolo, Z. Odoni. *Carico di prima fessurazione del conglomerato inflesso*. Giornate AICAP 91, Spoleto, pp. 33-42.

1983 L. Bortolotti. *Il significato della resistenza apparente a trazione per flessione del conglomerato da una analisi a rottura in presenza di strain-softening*.

Atti della Facoltà di Ingegneria, V.22, Ottobre 1983, Cagliari.

1991 L. Bortolotti, B. De Nicolo, Z. Odoni. *Modulus of Rupture for Concrete*. Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Cagliari, 1991.

1991 L. Bortolotti, B. De Nicolo, Z. Odoni. *Sicurezza a fessurazione di sezioni inflesse in conglomerato armato*. Giornate AICAP 91, Spoleto, pp. 33-42.

1994 L. Bortolotti. *Duttività a fessurazione delle travi inflesse in conglomerato*.

Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Università di Cagliari, 1994.

1988 L. Bortolotti. *Influenza del softening e del confinamento del conglomerato sul comportamento elastoplastico e sulla duttilità di membrature pressoinflesse in cemento armato*.

Analisi teorica e verifiche sperimentali. Atti della Facoltà di Ingegneria, V. 31, N. 2, **1984**

L. Bortolotti. *Sullo stato limite di flessione e pressoflessione delle travi in conglomerato armato in presenza di strain-softening*. Atti della Facoltà di Ingegneria, V.25, Ott.1984, Cagliari.

1996 L. Bortolotti. *Analisi plastica e relazioni costitutive per il conglomerato negli stati di tensione monoassiali*. Atti dell'VIII Congresso AIMETA, Vol. 1, Politecnico di Torino, Facoltà di Ingegneria, 9 Sett.-3 Ott. 1996.

1994 L. Bortolotti. *Influence of concrete tensile ductility on compressive strength of confined columns*. Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 6, No. 4, November, 1994, pp. 542-563.

