

## RESISTENZA AL PUNZONAMENTO DELLE PIASTRE IN CONGLOMERATO

Una piastra circolare in semplice conglomerato, vincolata in modo forte al contorno, per esempio incastrata, e dotata di notevole rigidezza flessionale, se caricata con un disco rigido di acciaio in maniera assial-simmetrica, manifesta una rottura di tipo fragile, improvvisa e violenta.

Tale rottura produce l'espulsione dal corpo della piastra di un solido di rivoluzione, a forma di campana, una sorta di tronco di cono, a profilo curvo con concavità rivolta verso l'alto.

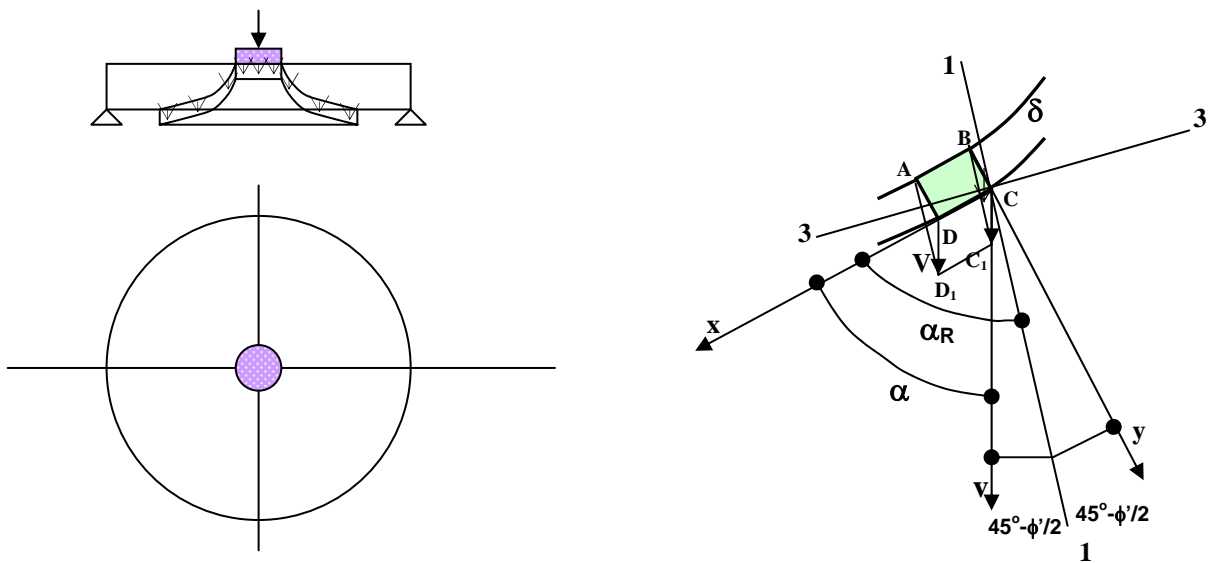
Per la determinazione del carico di rottura, consideriamo un modello fondato sulle ipotesi seguenti.

Meccanismo di rottura rigido-plastico: le deformazioni elastiche sono assenti o considerate trascurabili rispetto a quelle plastiche.

Le deformazioni plastiche si considerano concentrate in un intorno ristretto, di spessore infinitesimo, della superficie di rottura.

Lo stato di deformazione è considerato piano, e cioè nel processo deformativo le deformazioni circonferenziali dei cerchi, sezioni di livello del solido di rivoluzione, sono considerate nulle. Le curve di livello non subiscono variazioni di lunghezza.

L'intorno della superficie di rottura sia soggetto a un campo di spostamenti uniforme (v. figura sotto).



**Modello schematico del meccanismo di rottura e deformazioni indotte nell'intorno della superficie di rottura.**

In virtù di quest'ultimo, un elemento di tale intorno subisce una estensione lungo la direzione  $y$  di un sistema locale di riferimento e uno scorrimento angolare.

Siamo in presenza, quindi, di un **meccanismo di trazio-scorrimento**.

Con riferimento alla figura, lo spostamento generico di un punto all'interno dello spessore  $\delta$  dell'elemento è

$$v = V \frac{y}{\delta}$$

e le sue componenti lungo gli assi del riferimento locale sono

$$v_x = V \frac{y}{\delta} \cos \alpha$$

$$v_y = V \frac{y}{\delta} \sin \alpha$$

Le componenti di deformazione corrispondenti sono

$$\varepsilon_x = \partial v_x / \partial x = 0$$

$$\varepsilon_y = \partial v_y / \partial y = \frac{V}{\delta} \sin \alpha$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{V}{\delta} \cos \alpha$$

Operando una trasformazione di coordinate, con riferimento al sistema principale locale, otteniamo le componenti di deformazione principale

$$\varepsilon_1 = \frac{V}{2\delta} (\sin \alpha + 1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{V}{2\delta} (\sin \alpha - 1)$$

$$\varepsilon_2 = 0, \text{ per ipotesi.}$$

Poiché il meccanismo di rottura implica scorrimento, la tangente al profilo di rottura in ogni suo punto forma con la prima direzione principale un angolo

$$\alpha_R = 45^\circ + \frac{\phi'}{2}$$

Ne consegue che la prima direzione principale biseca l'angolo compreso tra la direzione  $y$  e quella dello spostamento  $v$ . Il semiangolo tra queste due direzioni vale

$$45^\circ - \frac{\phi'}{2}$$

Le componenti di deformazione principale, per la teoria della plasticità, possono derivarsi dalla condizione di plasticità attraverso la **regola del flusso** associata a tale condizione, detta anche **condizione di normalità**.

La condizione di plasticità coincide per noi con l'equazione esprime il criterio di rottura del conglomerato da noi assunto, e precisamente l'equazione riguardante il tipo di rottura per scorrimento.

Più precisamente, la regola citata contempla le componenti principali della velocità di deformazione prodotte da un campo di velocità di spostamento. Però, se si considera il primo istante unitario, tali componenti sono espresse in valore dalle quantità esprimenti le componenti di deformazione.

La regola di cui prima si esprime come segue

$$\varepsilon_i = \frac{\partial F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\partial \sigma_i}, \text{ con } i = 1, 2, 3$$

dove F è la condizione di plasticizzazione, e produce

$$\varepsilon_1 = \lambda(\sin \phi + 1)$$

$$\varepsilon_3 = \lambda(\sin \phi - 1)$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

Dal confronto delle doppie espressioni delle componenti, si deduce che

$$\lambda = \frac{V}{2\delta}$$

$$\alpha = \phi'$$

Il risultato direbbe che il profilo di rottura sia rettilineo, ma l'esperienza mostra che è curvilineo. Allora dobbiamo pensare che l'angolo di attrito interno del conglomerato sia variabile localmente lungo tale profilo.

Quindi, dobbiamo ammettere che nel fenomeno di rottura si manifesti un processo di **strain-softening** nel conglomerato.

Poiché lungo il profilo di rottura, a una certa profondità, misurata a partire da un'origine posta al centro del punzone, vi è un punto in cui  $\phi = \phi'$ , lungo la parte superiore del profilo dove  $\phi < \phi'$  vi sarà softening tipo compressione e lungo la parte inferiore dove  $\phi > \phi'$  vi sarà softening tipo trazione.

A questo punto, ammetteremo che la condizione di rottura valga anche in regime di softening e sarà espressa come segue

$$\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi) - 2\sigma'_t = 0$$

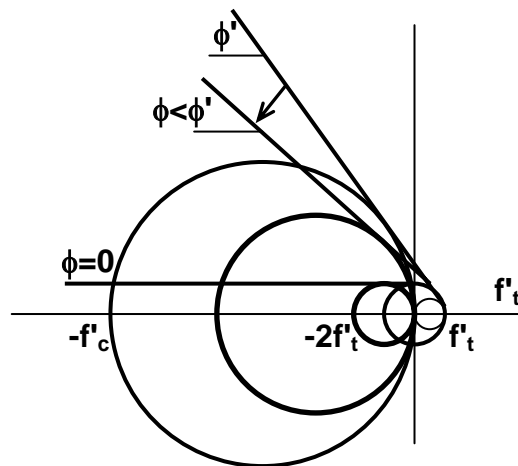
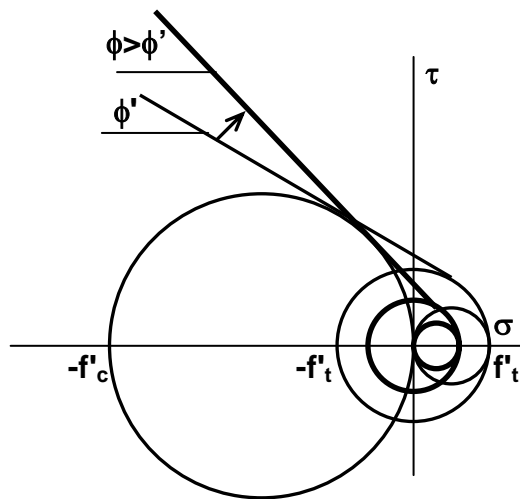
dove  $\phi$  = angolo di attrito attuale e puntuale e

$$\sigma'_t = f'_t \quad \text{per } \phi \leq \phi'$$

ovvero

$$\sigma'_t = \frac{f'_c(1 - \sin \phi)}{2} \quad \text{per } \phi \geq \phi'.$$

Le figure seguenti mostrano le modificazioni che subisce l'involuppo dei cerchi di rottura per effetto del softening in trazione e in compressione.



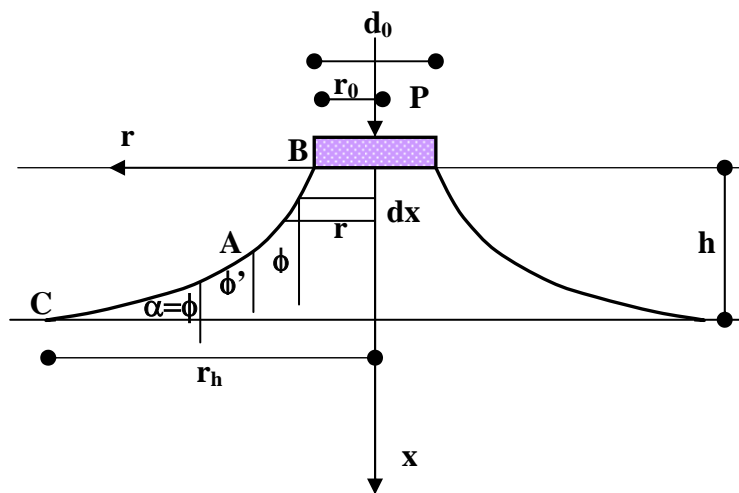
**Modificazioni nella forma indotte nella curva di rottura a causa del softening da trazione e da compressione.**

La condizione di normalità trae il nome dal fatto che, se al sistema di riferimento principale degli sforzi si sovrappone quello delle deformazioni principali, il vettore avente come componenti le deformazioni principali è normale alla curva di rottura in ogni suo punto, come può facilmente essere verificato.

Per la determinazione del carico di rottura, applichiamo l'equazione dei lavori virtuali per un campo di spostamenti virtuali uniforme, come quello ipotizzato in partenza.  
Sarà

$$PV = \int_{S_{AB}} W_1 dS + \int_{S_{BC}} W_1 dS$$

dove  $W_1$  è l'energia dissipata dall'unità di superficie di rottura e gli integrali sono estesi alle porzioni di superficie di rottura, rispettivamente sedi di softening da compressione e da trazione.



Sistema di coordinate di riferimento per il profilo di rottura.

Sarà, quindi

$$W_1 = \delta(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) = 0.5V[\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi)]$$

e poiché la quantità tra parentesi vale  $2\sigma'_t$ ,

$$W_1 = Vf'_t$$

ovvero

$$W_1 = V \frac{f'_c(1 - \sin \phi)}{2}$$

rispettivamente per softening da compressione e da trazione.

Ne segue che

$$P = 2\pi f'_t \int_0^{\bar{x}} r \frac{dx}{\cos \phi} + \pi f'_c \int_{\bar{x}}^h r \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} dx$$

dove  $r = r(x)$  è l'ordinata corrente della curva del profilo di rottura.

$$\text{Poiché } r' = \frac{dr(x)}{dx} = \tan \phi$$

e

$$\frac{1}{\cos \phi} = \sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \sqrt{1 + r'^2}$$

$$\frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} = \sqrt{1 + \tan^2 \phi} - \tan \phi = \sqrt{1 + r'^2} - r'$$

si ha

$$P = 2\pi f'_t \int_0^{\bar{x}} r \sqrt{1 + r'^2} dx + \pi f'_c \int_{\bar{x}}^h r (\sqrt{1 + r'^2} - r') dx$$

Poiché tale espressione deriva dall'aver considerato un cinematiso di rottura, essa rappresenta un *carico limite superiore* (*upper bound solution*).

Il carico di rottura vero si otterrà da un processo di minimizzazione del funzionale espresso dall'equazione precedente. Occorre, cioè, trovare la funzione  $r$  del profilo di rottura che minimizza il detto funzionale. Per questo intento, occorre operare sulle funzioni

$$F_1[r(x), r'(x)] = r(x) \sqrt{1 + |r'(x)|^2}$$

$$F_2[r(x), r'(x)] = r(x) \left[ \sqrt{1 + |r'(x)|^2} - r'(x) \right]$$

Il calcolo variazionale insegna che basta risolvere l'equazione di Eulero

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F_i}{\partial r'} - \frac{\partial F_i}{\partial r} = 0 \quad (i=1, 2)$$

Tale equazione, applicata alle due funzioni, produce in entrambi i casi, la seguente soluzione espressa dall'equazione differenziale

$$rr'' - (r')^2 - 1 = 0$$

Risolviendo tale equazione, si ottiene

$$r(x) = \frac{r_o}{2} \left( e^{\frac{x}{r_o \cos \phi_o}} + e^{-\frac{x}{r_o \cos \phi_o}} \right) + \frac{r_o}{2} \sin \phi_o \left( e^{\frac{x}{r_o \cos \phi_o}} - e^{-\frac{x}{r_o \cos \phi_o}} \right)$$

dove  $r_o$  e  $\phi_o$  sono i valori in corrispondenza dell'origine.

Eseguendo le derivate prima e seconda, l'equazione differenziale fornisce

$$r' = \sqrt{\frac{r^2}{r_o^2 \cos^2 \phi_o} - 1}$$

Pertanto, l'integrazione dell'espressione del carico fornisce

$$P = \frac{\pi f'_c}{2} \left\{ \begin{array}{l} r_h^2 \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{r_h} \cos \phi_o \right)^2} - r_o^2 \sin \phi_o + r_o^2 \cos^2 \phi_o \ln r_h \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{r_h} \cos \phi_o \right)^2}}{r_o (1 + \sin \phi_o)} \\ - \sin \phi' \left[ \bar{r}^2 \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{\bar{r}} \cos \phi_o \right)^2} - r_o^2 \sin \phi_o + r_o^2 \cos^2 \phi_o \ln \frac{\bar{r} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{\bar{r}} \cos \phi_o \right)^2} \right]}{r_o (1 + \sin \phi_o)} \right] \\ - (r_h^2 - \bar{r}^2) \end{array} \right\}$$

dove  $\bar{r}$  proviene dall'equazione di  $r$  per  $x = \bar{x}$ , e cioè per

$$\bar{x} = r_o \cos \phi_o \ln \left( \frac{\cos \phi_o}{1 + \sin \phi_o} \frac{1 + \sin \phi'}{\cos \phi'} \right)$$

Se il valore della pressione  $\sigma_p$  sotto il disco di carico è minore di  $f'_c$ , in dipendenza del valore di  $d_o/h$ , possiamo assumere  $\phi_o = \phi'$  (softening in trazione solamente). Allora, il carico di punzonamento diventa

$$P = \frac{\pi f'_c}{2} \left\{ r_h^2 \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{r_h} \cos \phi' \right)^2} - r_o^2 \sin \phi' + r_o^2 \cos^2 \phi' \ln r_h \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{r_h} \cos \phi' \right)^2}}{r_o (1 + \sin \phi')} - (r_h^2 - r_o^2) \right\}$$

Se lo stesso sforzo  $\sigma_p$  è maggiore di  $f'_c$ , possiamo assumere  $\phi_o = 0$  (softening in trazione e compressione) e il carico di punzonamento diventa

$$P = \frac{\pi f'_c}{2} \left\{ r_h^2 \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{r_h} \right)^2} + r_o^2 \ln r_h \frac{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{r_h} \right)^2}}{r_o} - \sin \phi' \left[ \bar{r}^2 \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{\bar{r}} \right)^2} + r_o^2 \ln \frac{\bar{r} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left( \frac{r_o}{\bar{r}} \right)^2} \right]}{r_o} \right] - (r_h^2 - \bar{r}^2) \right\}$$

dove

$$\bar{r} = \frac{r_o}{\cos \phi'}$$

Partendo da un fissato valore di  $\phi_o$ , se il valore di  $r_h$  calcolato con l'equazione di  $r$  risulta maggiore del raggio  $R$  della piastra, allora si deve assumere  $r_h=R$  e derivare  $\phi_o$  da essa equazione e quindi  $P$  dall'equazione più confacente.

In ogni caso, anche se si conferiscono a  $\phi_o$  valori apprezzabilmente differenti dai valori estremi sopra citati, l'entità del carico limite non subisce variazioni apprezzabili.



## Verifiche sperimentali

Per le verifiche dei risultati analitici ottenuti, si esaminano i dati sperimentali provenienti dalle prove effettuate da **R. Taylor e B. Hayes (University of Manchester)** su piastre quadrate caricate con punzoni quadrati. I vincoli sono di semplice appoggio (**S**) al contorno o di appoggio a spostamenti laterali impediti (**R**). Le piastre sono 22, di cui 6 in semplice conglomerato a vincolo (**R**), 10 a vincolo (**S**) con due percentuali di armatura e 6 a vincolo (**R**) con le stesse due percentuali di armatura. Il lato delle piastre è di circa 900 mm, la luce di 864 mm e lo spessore di 76 mm. Il lato del punzone è variabile da 51 a 152 mm. La resistenza del conglomerato varia da 27 a 37 MPa.

Quindi, le variabili in gioco sono il vincolo del contorno, la resistenza del conglomerato, la quantità di armatura e il rapporto lato punzone-spessore piastra.

Per i calcoli del carico di rottura, con riferimento alla teoria esposta, si è considerato un punzone circolare avente la stessa area di quello quadrato.

Per quanto riguarda il valore dell'angolo di attrito attuale nel conglomerato, all'ascissa zero dello spessore della piastra, esso è stato assunto pari a zero se la pressione  $p_o$  sotto il punzone, dovuta al carico di rottura, supera la resistenza a compressione del conglomerato. Se è inferiore, si è assunto il valore dell'angolo di attrito interno  $\phi'$  del conglomerato.

Le tabelle seguenti riportano le caratteristiche delle piastre, i carichi di rottura sperimentali e calcolati e i confronti tra essi.

Designazione	$\rho_s$	lato punzone		dia. equiv.		h (mm)	do/h	età prova (g)	Resistenza cubica	
		a (in)	a (mm)	d <sub>o</sub> (mm)	$\pi d_o^2/4=A_o$				f'c (lb/in <sup>2</sup> )	f'c (MPa)
1R2(a)	0	2	50,8	57,3	2580,6	76,2	0,75	140	5320	36,69
1R2(b)	0	2	50,8	57,3	2580,6	76,2	0,75	147	4700	32,42
1R3	0	3	76,2	86,0	5806,4	76,2	1,13	147	5150	35,52
1R4	0	4	101,6	114,6	10322,6	76,2	1,50	154	5150	35,52
1R5	0	5	127	143,3	16129,0	76,2	1,88	29	3950	27,24
1R6	0	6	152,4	172,0	23225,8	76,2	2,26	33	3950	27,24
2S2	0,0157	2	50,8	57,3	2580,6	76,2	0,75	29	4700	32,42
2R2	0,0157	2	50,8	57,3	2580,6	76,2	0,75	33	4700	32,42
2S3	0,0157	3	76,2	86,0	5806,4	76,2	1,13	29	4450	30,69
2R3	0,0157	3	76,2	86,0	5806,4	76,2	1,13	33	4450	30,69
2S4	0,0157	4	101,6	114,6	10322,6	76,2	1,50	29	4200	28,97
2R4	0,0157	4	101,6	114,6	10322,6	76,2	1,50	33	4200	28,97
2S5	0,0157	5	127	143,3	16129,0	76,2	1,88	29	4000	27,59
2R5	0,0157	5	127	143,3	16129,0	76,2	1,88	33	4000	27,59
2S6	0,0157	6	152,4	172,0	23225,8	76,2	2,26	29	3330	22,97
2R6	0,0157	6	152,4	172,0	23225,8	76,2	2,26	33	3330	22,97
3S2	0,0314	2	50,8	57,3	2580,6	76,2	0,75	29	4130	28,48
3R2	0,0314	2	50,8	57,3	2580,6	76,2	0,75	33	4130	28,48
3S4	0,0314	4	101,6	114,6	10322,6	76,2	1,50	29	4100	28,28
3R4	0,0314	4	101,6	114,6	10322,6	76,2	1,50	33	4100	28,28
3S6	0,0314	6	152,4	172,0	23225,8	76,2	2,26	29	3920	27,04
3R6	0,0314	6	152,4	172,0	23225,8	76,2	2,26	33	3920	27,04

Designazione	$\rho_s$	$d_o/h$	$f'c$ (MPa)	Calcolo ( $\phi_o=\phi'$ )	Carico rottura sperimentale		Confronto		$\rho_o=Pu/A_o$	$\rho_o/f'c$
				P (N)	$P_u$ (t)	$P_u$ (N)	$P_u/P$			
1R2(a)	0	0,75	36,69	73773	8,5	83385	1,13	32,31	0,88	
1R2(b)	0	0,75	32,42	66668	8,9	87309	1,31	33,83	1,04	
1R3	0	1,13	35,52	108380	13	127530	1,18	21,96	0,62	
1R4	0	1,50	35,52	145285	15	147150	1,01	14,26	0,40	
1R5	0	1,88	27,24	146850	11,95	117230	0,80	7,27	0,27	
1R6	0	2,26	27,24	177151	14,4	141264	0,80	6,08	0,22	
2S2	0,0157	0,75	32,42	66668	7,25	71123	1,07	27,56	0,85	
2R2	0,0157	0,75	32,42	66668	8,38	82208	1,23	31,86	0,98	
2S3	0,0157	1,13	30,69	96159	9,3	91233	0,95	15,71	0,51	
2R3	0,0157	1,13	30,69	96159	11,5	112815	1,17	19,43	0,63	
2S4	0,0157	1,50	28,97	122938	8,75	85838	0,70	8,32	0,29	
2R4	0,0157	1,50	28,97	122938	13,95	136850	1,11	13,26	0,46	
2S5	0,0157	1,88	27,59	148399	9,85	96629	0,65	5,99	0,22	
2R5	0,0157	1,88	27,59	148399	14,5	142245	0,96	8,82	0,32	
2S6	0,0157	2,26	22,97	153442	9,85	96629	0,63	4,16	0,18	
2R6	0,0157	2,26	22,97	153442	15,75	154508	1,01	6,65	0,29	
3S2	0,0314	0,75	28,48	59872	8	78480	1,31	30,41	1,07	
3R2	0,0314	0,75	28,48	59872	8	78480	1,31	30,41	1,07	
3S4	0,0314	1,50	28,28	120498	11,75	115268	0,96	11,17	0,39	
3R4	0,0314	1,50	28,28	120498	13,5	132435	1,10	12,83	0,45	
3S6	0,0314	2,26	27,04	176030	15,3	150093	0,85	6,46	0,24	
3R6	0,0314	2,26	27,04	176030	17,25	169223	0,96	7,29	0,27	

Denom.	$d_o/h$	$\rho_s$	$f'c$	Calcolo ( $\phi_o=0$ )	Confronto
				P (N)	$P_u/P$
1R2(a)	0,75	0,0000	36,69	105396	0,791
1R2(b)	0,75	0,0000	32,42	94459	0,924
1R3	1,13	0,0000	35,52	137832	0,925
1R4	1,50	0,0000	35,52	160028	0,920
1R5	1,88	0,0000	27,24	142221	0,824
1R6	2,26	0,0000	27,24	140701	1,004
2S2	0,75	0,0157	32,42	94459	0,753
2R2	0,75	0,0157	32,42	94459	0,870
2S3	1,13	0,0157	30,69	122395	0,745
2R3	1,13	0,0157	30,69	122395	0,922
2S4	1,50	0,0157	28,97	138100	0,622
2R4	1,50	0,0157	28,97	138100	0,991
2S5	1,88	0,0157	27,59	143389	0,674
2R5	1,88	0,0157	27,59	143389	0,992
2S6	2,26	0,0157	22,97	128315	0,753
2R6	2,26	0,0157	22,97	128315	1,204
3S2	0,75	0,0314	28,48	84149	0,933
3R2	0,75	0,0314	28,48	84149	0,933
3S4	1,50	0,0314	28,28	135629	0,850
3R4	1,50	0,0314	28,28	135629	0,976
3S6	2,26	0,0314	27,04	140170	1,071
3R6	2,26	0,0314	27,04	140170	1,207

## SELEZIONE DEI RISULTATI

	do/h	Pu/P	Pu/P		do/h	Pu/P
1R2(a)	0,75	1,13	1,13	2S2	0,75	1,07
1R2(b)	0,75	0,92	0,92	2S3	1,13	0,95
1R3	1,13	1,18	1,18	2S4	1,5	0,7
1R4	1,50	1,01	1,01	2S5	1,88	0,65
1R5	1,88	0,80	1,23	2S6	2,26	0,63
1R6	2,26	0,80	1,17	3S2	0,75	0,933
2R2	0,75	1,23	1,11	3S4	1,5	0,96
2R3	1,13	1,17	0,96	3S6	2,26	0,85
2R4	1,5	1,11	1,01			
2R5	1,88	0,96	0,93			
2R6	2,26	1,01	1,10			
3R2	0,75	0,93	0,96			
3R4	1,5	1,1				
3R6	2,26	0,96				
		m=1,02	m=1,06			
		s=13,11%	s=10,1%			

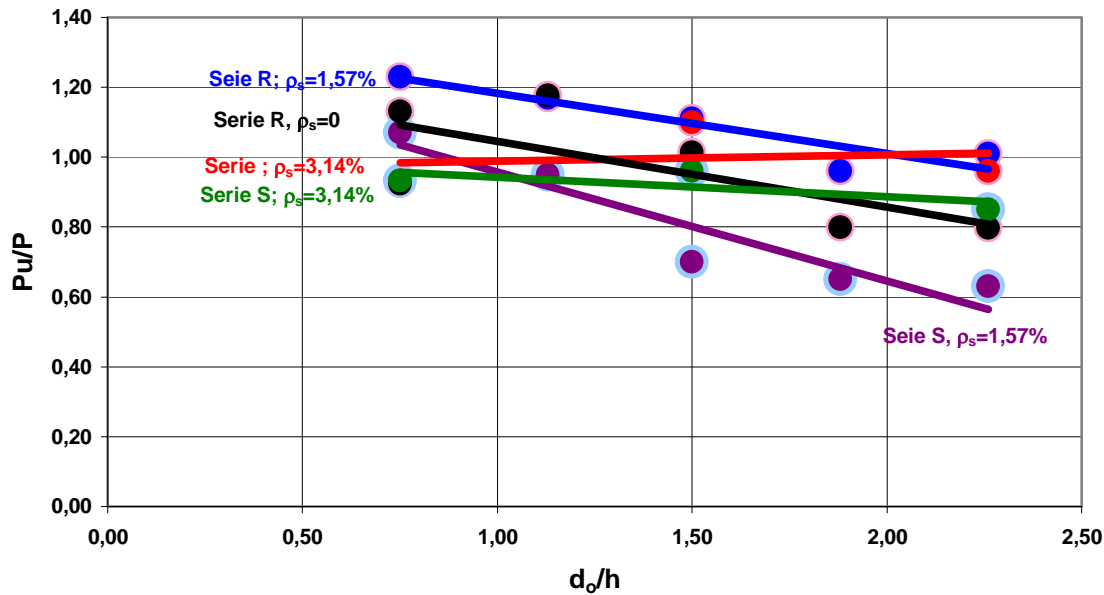
Il grafico seguente riporta i valori del rapporto di carico in funzione del rapporto  $d_0/h$  per le diverse serie di piastre sperimentate.

Si osserva che se il vincolo è forte (R) e l'armatura è consistente, il rapporto è praticamente uguale a uno, per qualsiasi valore di resistenza del conglomerato e del rapporto  $d_0/h$ .

Questo significa che le considerazioni teoriche, riferite a un criterio rigido-plastico richiedente una elevata rigidezza flessionale della piastra, sono fondate.

Gli altri andamenti dei diagrammi mostrano che, quando i requisiti richiamati vengono meno, e cioè in presenza di vincoli più deboli e armatura meno consistente, il carico calcolato secondo lo stesso modello impiegato è sovrastimato. Occorre cioè introdurre un coefficiente di riduzione al carico calcolato (*coefficiente di meccanismo*), in dipendenza dell'entità dei parametri in gioco, derivabile dalle relazioni lineari indicate nel grafico. In esso si notano anche dei punti che fanno pensare a un fenomeno di iperesistenza delle piastre. Tali valori sono anche legati alla scelta del valore di  $\phi_0$  che non è noto a priori e che occorre stimare per effettuare il calcolo della resistenza della piastra.

Andamento del rapporto di carico in funzione di  $d_o/h$



Il diagramma successivo illustra come varia il rapporto tra il *rapporto di carico* e il *numero indice* (adimensionale), definito come segue,

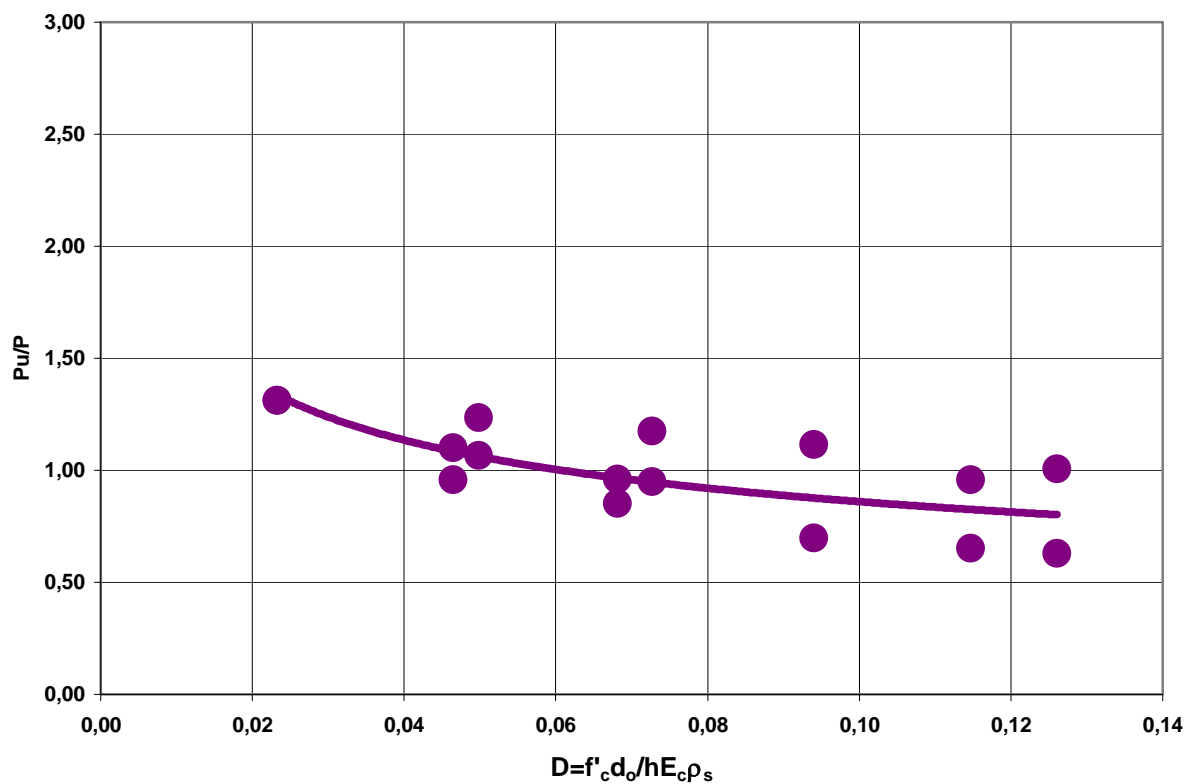
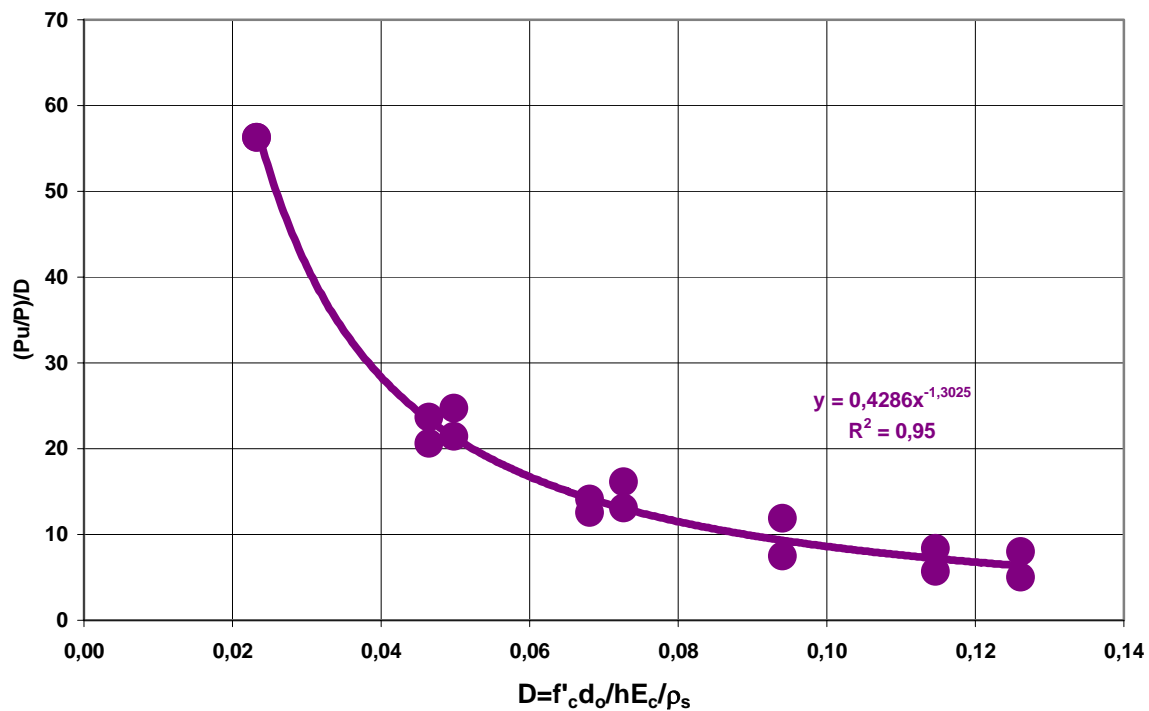
$$D = f' d_o / h E_c \rho_s$$

con il numero indice stesso.

La distribuzione dei punti mostra un ramo discendente modellato attendibilmente con una curva di potenza, da cui discende la relazione diretta tra le due grandezze. La dispersione dei punti sperimentali rispetto alla curva di potenza si accentua notevolmente nella relazione diretta, come si vede nel diagramma successivo dove la curva è ancora di potenza e discendente.

Naturalmente, i risultati e i grafici ottenuti sono relativi al particolare valore del parametro geometrico  $L/h=11.34$  (rapporto luce-spessore della piastra).

Il rapporto  $Pu/P=k_m$  rappresenta un *coefficiente di meccanismo*, e cioè il coefficiente per cui bisogna moltiplicare il carico di rottura calcolato, con riferimento alla teoria esposta, per ottenere la previsione del carico di rottura a punzonamento della piastra che si considera, il cui meccanismo effettivo di rottura si discosta da quello ideale ipotizzato nella trattazione.

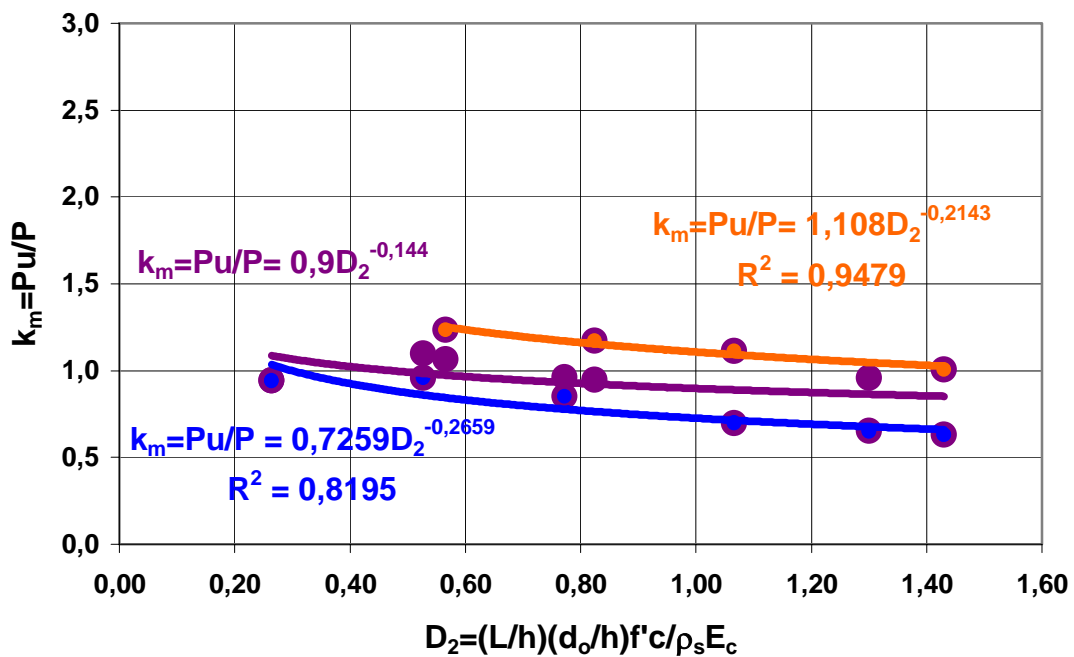
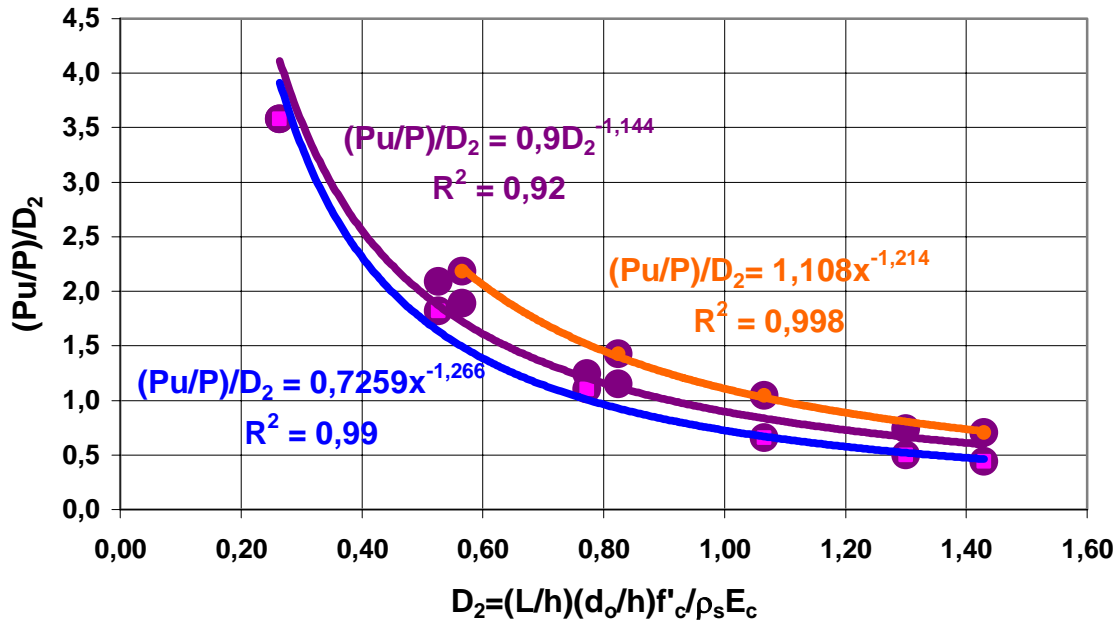


Ancora, nei diagrammi successivi si è tenuto conto anche del rapporto  $L/h$ , introducendo il numero adimensionale

$$D_1 = (L/h) f'_c (d_o/h) / E_c \rho_s$$

Il carico ultimo di calcolo  $P$  (ovvero  $P_{calc}$ ) è stato determinato con la formula semplificata seguente

$$P = \pi(d_o + h)hf'_t$$



In quest'ultimo grafico, al fine di valutare conservativamente il valore del coefficiente di meccanismo in funzione del numero indice, possiamo considerare l'espressione, relativa al diagramma più basso,

$$k_m=Pu/P = 0,726D_2^{-0,26}$$

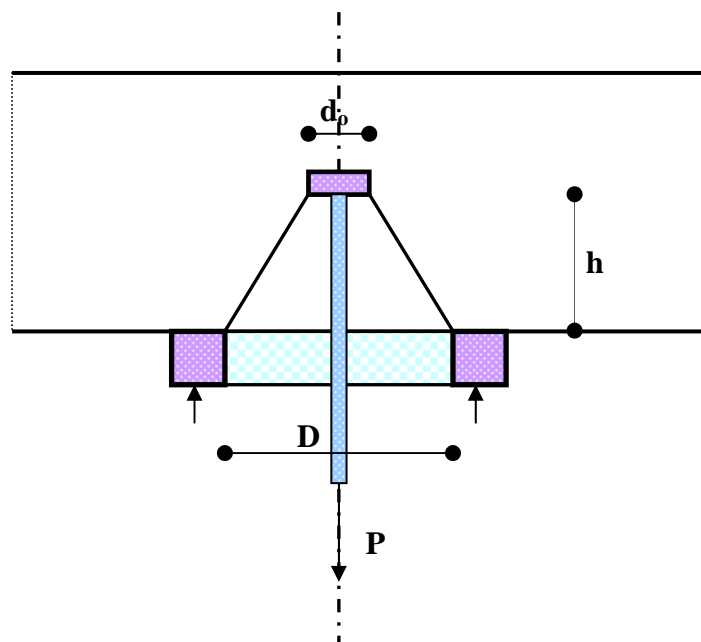
La stima del carico di rottura si ottiene moltiplicando tale coefficiente per il valore del carico calcolato secondo l'equazione semplificata precedente, come segue

$$Pu_{calc} = k_m P_{calc}$$

## RESISTENZA DEL CONGLOMERATO SOGGETTO A PULLOUT

La prova di pullout costituisce uno dei metodi, cosiddetti parzialmente distruttivi, per la valutazione della resistenza in situ del conglomerato. Tramite un inserto metallico a gambo cilindrico, munito a un estremo di una testa circolare, contrastando la forza applicata al gambo sul masso di conglomerato attraverso un anello rigido di acciaio, si estrae un cono di conglomerato che presenta un profilo curvo di forma analoga a quello che si manifesta nella prova di punzonamento.

Ciò avviene se l'anello di contrasto ha ampiezza tale da consentire la libera formazione di tale profilo. Se, invece, come avviene nella prova pratica, l'anello di contrasto ha dimensioni notevolmente ridotte, dovute alla necessità di avere un apparato di prova di dimensioni contenute e facilmente maneggevole, il cono di estrazione ha un profilo di generatrice che è sostanzialmente rettilineo e il diametro della base coincidente con quello dell'anello di contrasto.



Schema dell'apparato di carico nella prova di pullout.

In questa sezione è sviluppato un modello teorico analogo a quello utilizzato per il caso del punzonamento.

L'intento è quello di derivare una espressione semplice e affidabile per la valutazione della resistenza del conglomerato.

### Analisi teorica

Come per il caso del punzonamento, si considera un meccanismo di rottura rigido-plastico di trazio-scorrimento con le deformazioni plastiche concentrate in un intorno ristretto della superficie di rottura. Lo stato di sforzo è triassiale e quello di deformazione è assunto essere piano.

Come criterio di rottura è assunto, come al solito, quello alla Coulomb-Mohr modificato

$$\sigma_1(1 + \sin \phi') - \sigma_3(1 - \sin \phi') - 2f'_t = 0$$

insieme con la nota limitazione di *tension cut-off*.

Quando il conglomerato è investito da processi di softening, i quali introducono variazioni nell'angolo di attrito interno, la condizione di rottura diventa

$$\sigma_1(1 + \sin \phi) - \sigma_3(1 - \sin \phi) - 2\sigma'_t = 0$$

dove  $\phi$  = angolo di attrito attuale e puntuale e

$$\sigma'_t = f'_t \quad \text{per } \phi \leq \phi'$$

Ovvero

$$\sigma'_t = \frac{f'_c(1 - \sin \phi)}{2} \quad \text{per } \phi \geq \phi'.$$

Con riferimento allo schema in figura dell'apparato di prova e a un profilo rettilineo del cono di estrazione, a causa del valore ridotto dell'angolo di semi-apertura del cono, il conglomerato plasticizzato nell'intorno della superficie di rottura è in regime di softening tipo compressione e, perciò, il carico di rottura per estrazione, secondo i risultati ottenuti nella teoria del punzonamento, sarebbe espresso nella forma semplice seguente

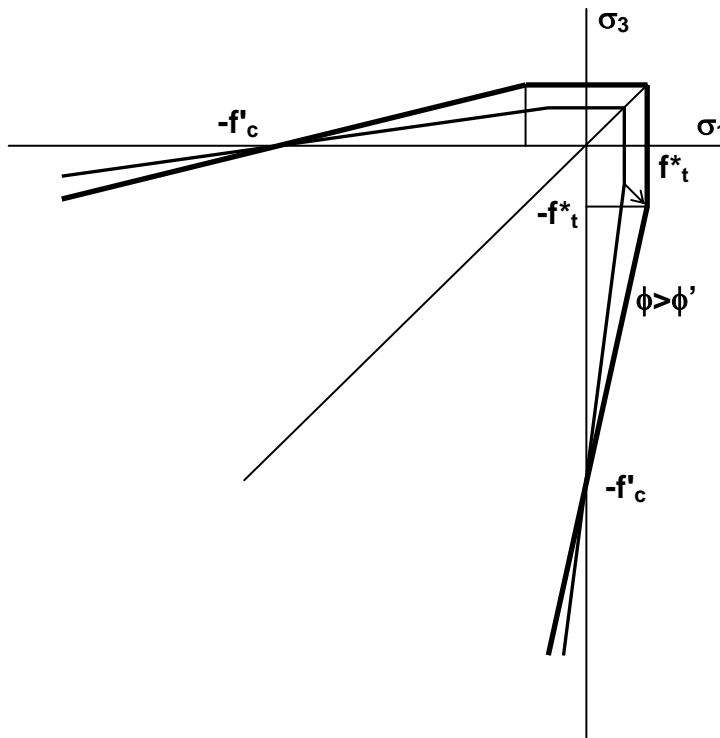
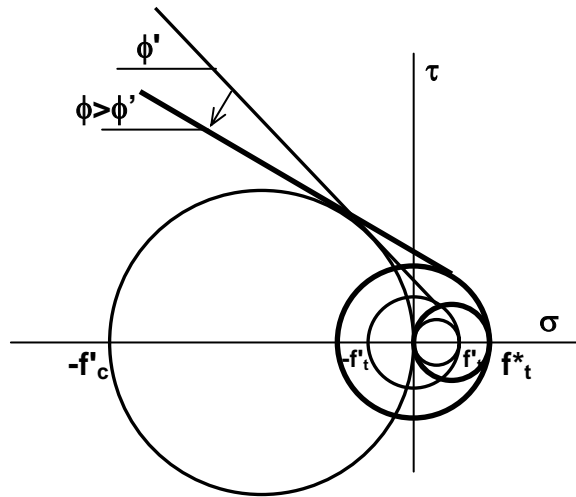
$$P = f'_t S = \frac{\pi(d_o + h)hf'_t}{2 \cos \alpha}$$

dove  $S$  è l'area della superficie tronco-conica di rottura.

Tale espressione, però, fornisce valori notevolmente inferiori a quelli sperimentali, come è molto facile controllare.

Questo fatto fa ritenere che, in relazione alla particolare geometria dell'apparato di carico, lo stesso determini una azione di confinamento accentuato del conglomerato, il quale produce una **iper-resistenza a trazione** del conglomerato. Questa si manifesta con una riduzione dell'angolo di attrito interno. Nelle figure seguenti sono illustrate le modificazioni che subisce la curva costitutiva di rottura per effetto di tale fenomeno.





**Modificazioni nella forma indotte nella curva di rottura a causa dell'iperresistenza a trazione, nei riferimenti normale e principale.**

Se assumiamo tale resistenza maggiorata nel modo seguente, e cioè

$$f_t^* = f_t'(1 + \sin \phi') = 2(k - 1) \frac{f_c'}{k^2}$$

che implica il rapporto di resistenza modificato

$$k^* = \frac{f_c'}{f_t^*} = \frac{f_c'}{f_t'(1 + \sin \phi')} = \frac{k}{(1 + \sin \phi')}$$

e quindi

$$\sin \phi^* = 1 - \frac{2}{k^*} = 1 - \frac{2(1 + \sin \phi')}{k} = 1 - 4 \frac{k-1}{k^2} = \sin^2 \phi'$$

questo assunto produce una modificazione della curva di rottura, correlata al criterio stesso di rottura, che implica una riduzione dell'angolo di attrito interno, prodotto dall'incrudimento in trazione del conglomerato.

Con questi presupposti, il carico di rottura diventa

$$P = f_t'(1 + \sin \phi')S = \frac{2(k-1)}{k} f_t'S$$

### Verifica sperimentale

Sono di seguito riportati i risultati di una estesa sperimentazione (v. Bibliografia) eseguita su conglomerati utilizzati normalmente e frequentemente nelle costruzioni civili.

Sono stati sperimentati conglomerati di differenti resistenze e testati a differenti età di stagionatura, variabili tra 3 e 365 giorni. La resistenza a 28 giorni era compresa tra 25 e 43 MPa.

Nella tabella seguente sono riportati tutti i valori sperimentali, i calcoli del carico di pullout con la formula di cui sopra e il confronto tra valori sperimentali e calcolati con i valori medi e di deviazione standard. Come si nota, questi ultimi sono molto contenuti, ciò che denota l'affidabilità della formula proposta.

VERIFICHE PULLOUT			S=6054 mm <sup>2</sup>						
Età (g)	f'c (MPa)	k	f't (MPa)	t=1+sinφ'	f <sub>t</sub> * (MPa)	Pu (kN)	Pcalc (kN)	Pu/Pcalc	
3	6,8	7,216	0,94	1,72	1,62	9,5	9,83	0,97	
3	13,6	8,032	1,69	1,75	2,96	16,1	17,95	0,90	
3	14,9	8,188	1,82	1,76	3,19	17,8	19,34	0,92	
3	19,8	8,776	2,26	1,77	4,00	21,3	24,20	0,88	
3	23,6	9,232	2,56	1,78	4,56	22,7	27,60	0,82	
7	14,4	8,128	1,77	1,75	3,11	18,5	18,81	0,98	
7	25,2	9,424	2,67	1,79	4,78	27,8	28,94	0,96	
7	27,2	9,664	2,81	1,79	5,05	29,6	30,55	0,97	
7	33,5	10,42	3,21	1,81	5,81	33,8	35,19	0,96	
7	39,1	11,092	3,53	1,82	6,41	36,1	38,83	0,93	
14	20,7	8,884	2,33	1,77	4,14	25,9	25,04	1,03	
14	30,5	10,06	3,03	1,80	5,46	34,1	33,06	1,03	
14	32,7	10,324	3,17	1,81	5,72	35	34,64	1,01	
14	38,4	11,008	3,49	1,82	6,34	38,1	38,40	0,99	
14	45,4	11,848	3,83	1,83	7,02	41,8	42,48	0,98	
28	26,2	9,544	2,75	1,79	4,92	31	29,76	1,04	
28	33,2	10,384	3,20	1,81	5,78	36,9	34,98	1,05	
28	35,3	10,636	3,32	1,81	6,01	37,8	36,41	1,04	
28	41	11,32	3,62	1,82	6,60	40,3	39,98	1,01	
28	47,2	12,064	3,91	1,83	7,18	43	43,45	0,99	
60	28,3	9,796	2,89	1,80	5,19	32,9	31,41	1,05	
60	37,7	10,924	3,45	1,82	6,27	39,7	37,96	1,05	

60	38,5	11,02	3,49	1,82	6,35	40,3	38,46	1,05
60	43,6	11,632	3,75	1,83	6,85	42,5	41,48	1,02
60	50,8	12,496	4,07	1,84	7,48	46,2	45,28	1,02
90	29,1	9,892	2,94	1,80	5,29	33,5	32,02	1,05
90	39,6	11,152	3,55	1,82	6,47	40,3	39,14	1,03
90	40,1	11,212	3,58	1,82	6,52	40,7	39,44	1,03
90	45,5	11,86	3,84	1,83	7,03	43,4	42,53	1,02
90	51,6	12,592	4,10	1,84	7,54	46,5	45,68	1,02
365	45,5	11,86	3,84	1,83	7,03	41,1	42,53	0,97
365	45,5	11,86	3,84	1,83	7,03	42,1	42,53	0,99
								<b>m=0,993</b>
								<b>s=5,43%</b>

Età (g)	Pu/Pcalc	Pu/Pcalc	Pu/Pcalc
3			
3			
3			
3			
3			
7			0,98
7			0,98
7			0,96
7			0,97
7			0,96
14		1,03	0,93
14		1,03	1,03
14		1,01	1,03
14	0,99	0,99	1,01
14	0,98	0,98	0,99
28	1,04	1,04	0,98
28	1,05	1,05	1,04
28	1,04	1,04	1,05
28	1,01	1,01	1,04
28	0,99	0,99	1,01
60	1,05	1,05	0,99
60	1,05	1,05	1,05
60	1,05	1,05	1,05
60	1,02	1,02	1,05
60	1,02	1,02	1,02
90	1,05	1,05	1,02
90	1,03	1,03	1,05
90	1,03	1,03	1,03
90	1,02	1,02	1,03
90	1,02	1,02	1,02
365	0,97	0,97	1,02
365	0,99	0,99	0,97
<b>m=1,02    m=1,02    m=1,00</b>			
<b>s=2,52%    s=2,38%    s=3,30%</b>			

Essendo deducibile il valore di resistenza a trazione dall'equazione

$$f'_t = \frac{P}{tS}$$

ed esprimendo la resistenza a compressione dall'espressione del rapporto di resistenza  $k$

$$f'_c = \frac{6.4f'_t}{1 - 0.12f'_t}$$

si ha

$$f'_c = \frac{6.4 \frac{P}{tS}}{1 - 0.12 \frac{P}{tS}}$$

Ad esempio, per conglomerati di età compresa tra 28 e 90 giorni, assumendo conservativamente  $t=1.9$ , si ottiene, essendo  $S=6054 \text{ mm}^2$

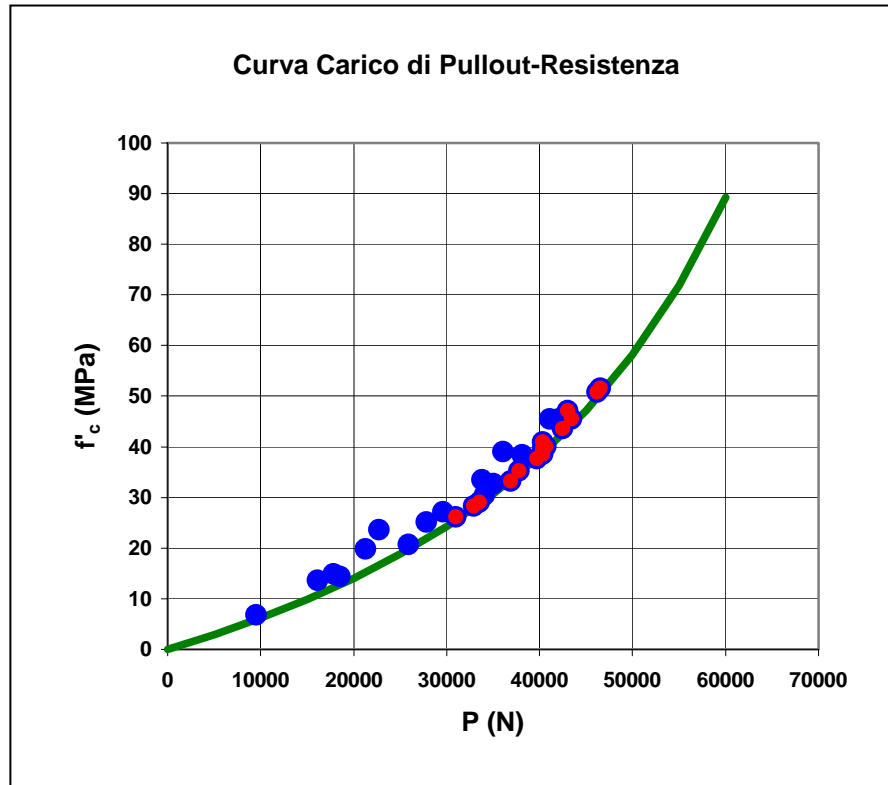
$$f'_c = \frac{P}{1797 - 0.01875P}$$

con  $P$  espresso in  $N$ .

Nella seguente tabella sono riportati i calcoli effettuati con tale formula e i confronti.

Età (giorni)	f'c calc	f'c/f'c calc
28	25,50	1,03
28	33,39	0,99
28	34,73	1,02
28	38,70	1,06
28	43,40	1,09
60	27,88	1,02
60	37,72	1,00
60	38,70	0,99
60	42,49	1,03
60	49,64	1,02
90	28,66	1,02
90	38,70	1,02
90	39,37	1,02
90	44,14	1,03
90	50,26	1,03
<b>Media</b>		<b>m=1,02</b>
<b>Deviazione standard</b>		<b>s=2,3%</b>

Nel grafico seguente è descritta la curva carico di pullout-resistenza secondo la formula precedente. Su di essa sono riportati tutti i valori sperimentali e, marcati in rosso, quelli di età 28-90 giorni, conformi alla formula utilizzata.



Assumendo  $t=1.8$ , valore medio di tutti i valori sperimentali, si ottiene

$$f'_c = \frac{P}{1750 - 0.019P}$$

con  $P$  espresso in  $N$ .

Con tale espressione si ottengono le seguenti deviazioni standard:

per stagionature da **7 a 365 giorni**,  $s = 5.75\%$

per stagionature da **14 a 365 giorni**,  $s = 3.48\%$

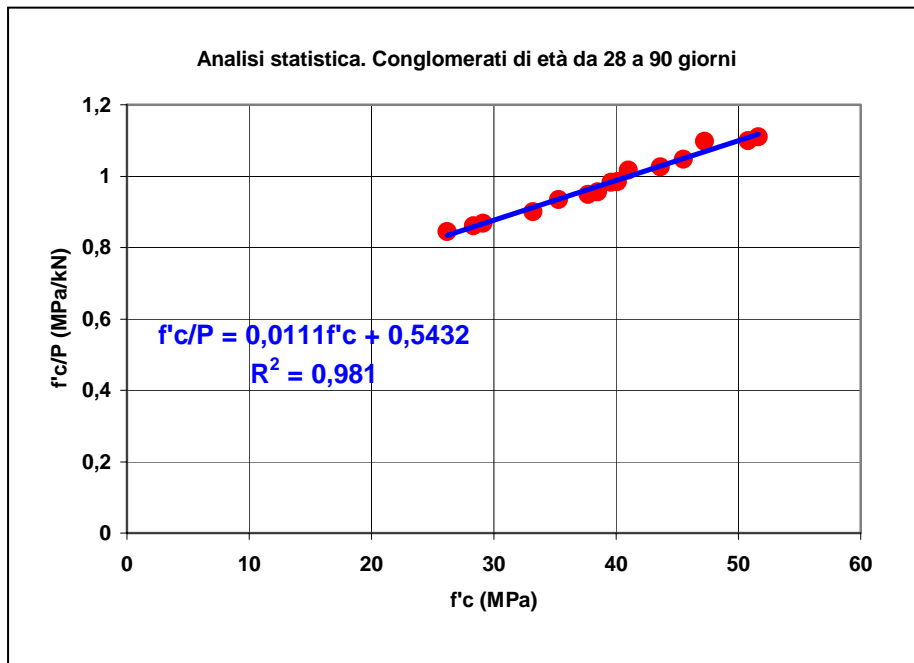
per stagionature da **28 a 365 giorni**,  $s = 3.37\%$

#### *Analisi statistico-matematica dei risultati*

Vediamo, ora, come una appropriata procedura statistico-matematica condotta sui risultati sperimentali sia in grado di confermare i risultati analitici ottenuti attraverso la teoria del pullout

esaminata in precedenza. E cioè, di ottenere le medesime formulazioni per la stima della resistenza ottenute in precedenza.

Per esempio, descriviamo il rapporto sperimentale tra la resistenza e il carico in funzione della resistenza stessa. Nella figura seguente è illustrata la distribuzione dei punti per i conglomerati di età 28-90 giorni. Essa è modellata linearmente con l'equazione descritta in figura.



Da tale equazione si deriva la seguente espressione per la determinazione della resistenza.

$$f'_c = \frac{P}{1.842 - 0.0204P}$$

con  $P$  espresso in  $kN$ .

Questa espressione è formalmente identica a quella derivata per via teorica e anche i coefficienti numerici sono praticamente coincidenti.

Il risultato conferma, inoltre, che anche la formulazione lineare del noto rapporto  $k$ , che fu impiegato nelle derivazioni analitiche del primo caso, è attendibile.

L'espressione trovata produce i seguenti valori di deviazione standard:

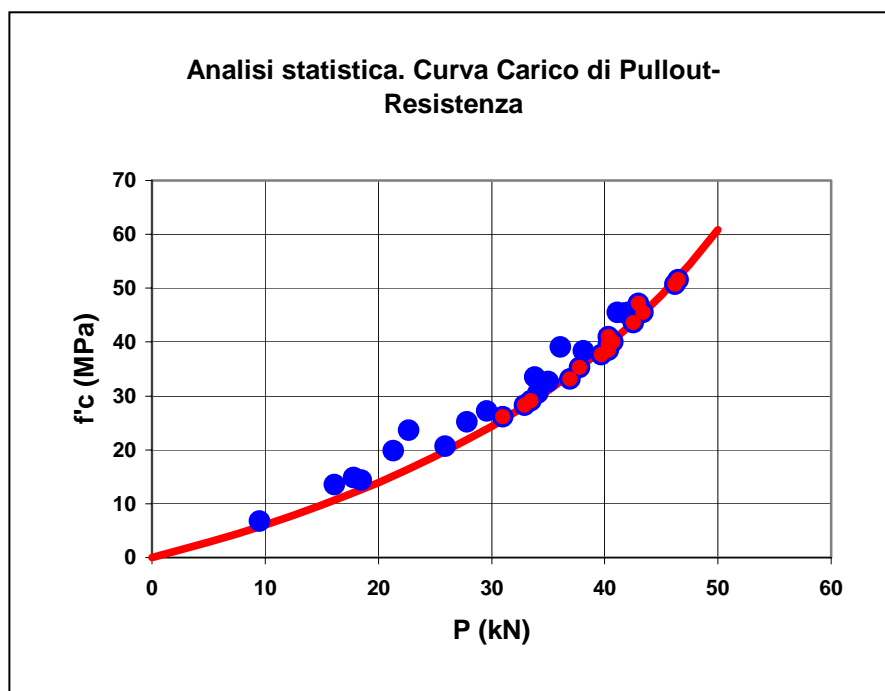
per stagionature da **28 a 90 giorni**,  $s = 2.16\%$

per stagionature da **14 a 90 giorni**,  $s = 3.06\%$

per stagionature da **14 a 365 giorni**,  $s = 3.63\%$

Tali valori sono molto buoni e sono indice di affidabilità della formula proposta.

Nella figura successiva è descritta la curva di resistenza sulla quale sono riportati tutti i punti sperimentali e quelli di età 28-90 giorni sono evidenziati in rosso.



### ***Bibliografia***

L. Bortolotti. *Punching Shear Strength in Concrete Slabs*. ACI Structural Journal, Vol. 87, No2, March-April 1990, pp.208-219.

R. Taylor, B. Hayes. *Some tests on the effect of edge restraint on punching shear in reinforced concrete slabs*. Magazine of Concrete Research, Vol. 17, No. 50, March 1965, pp.39-44.

L. Bortolotti. Discussion on the paper: *Punching Shear Behavior of Restrained Reinforced Concrete Slabs*, by J. S. Kuang and C.T. Morley, from the January-February 1992 ACI Structural Journal, p. 13. *ACI Structural Journal*, v. 89, No. 6, Nov.-Dec. 1992, pp 738-739.

L. Bortolotti. *Strength of Concrete Subjected to Pullout Load*. Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 15, No. 5, October 2003 pp. 208-219. 2003, pp. 491-495.

L. Bortolotti. *Sulla resistenza del conglomerato soggetto a pullout..* L'Industria Italiana del Cemento, No. 722, Giu. 1997, pp. 478-485.

P. Cossu, E. Pozzo. *Correlazioni tra forza di estrazione e resistenza a compressione del calcestruzzo nella metodologia pullout al variare del grado di maturazione*. L'Industria Italiana del Cemento, 1995, pp.434-439.

### ***Previsione della resistenza nel tempo***

I risultati sperimentali precedenti ci danno l'occasione per descrivere la variazione di resistenza al variare del tempo di stagionatura del conglomerato.

Considerando i valori medi più attendibili del rapporto

$$r = \frac{f'_c}{f'_{c,28}}$$

tra la resistenza al tempo  $t$  e quella a 28 giorni, come riportato nella seguente tabella,

Età (g) t	r=f'c/f'c28		calcolo	confronto	
	r	t/r			r
3	0,454	6,60793	0,50	3	0,91
7	0,794	8,816121	t/r = 0,8643t + 3,3937	7	1,07
14	0,936	14,95726		14	1,03
28	1	28	r=t/(0,86t+4)	28	0,98
60	1,077	55,71031	1,09	60	0,99
90	1,113	80,86253	1,11	90	1,00

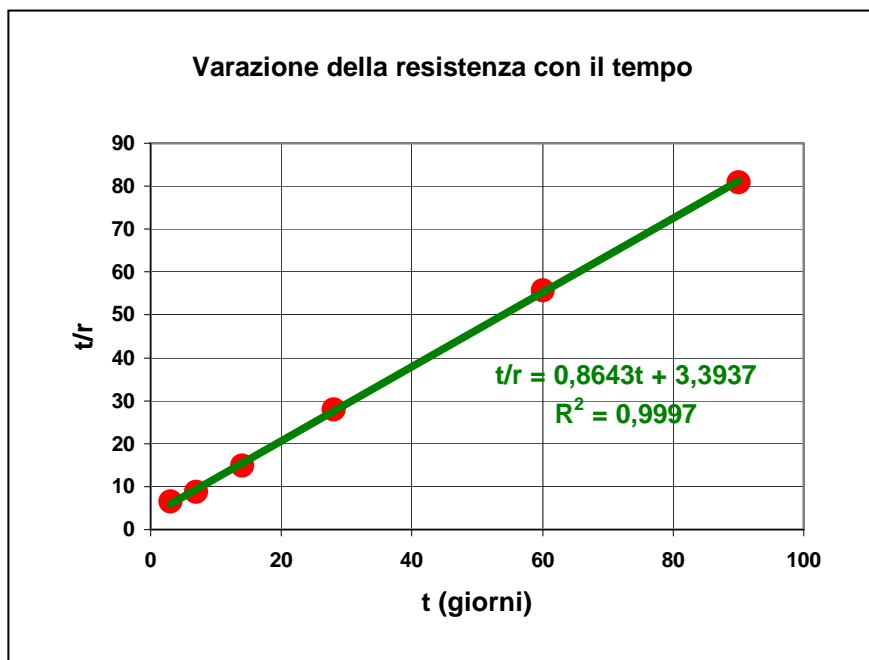
m=1,00  
s=4,98%

il grafico seguente illustra la distribuzione dei punti e la curva tendenziale avente l'equazione indicata.

Essa conduce alla seguente relazione di resistenza

$$r = \frac{t}{0.86t + 3.4}$$

che produce una deviazione standard di 5.24%, come descritto nella tabella nelle operazioni di confronto.





La curva di resistenza nel tempo è descritta di seguito sui valori sperimentali.

Variazione della resistenza con il tempo

